КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 85, № 3, с. 307–318

УДК 541.182.213

ИНЕРЦИОННОЕ ОСАЖДЕНИЕ СУБМИКРОННЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В МОДЕЛЬНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ ФИЛЬТРАХ ИЗ УЛЬТРАТОНКИХ ВОЛОКОН

В. А. Кирш*

Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, Ленинский просп. 31, корп. 4, Москва, 119071 Россия

**e-mail: va_kirsch@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.
После доработки 25.04.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

Рассмотрено влияние инерции субмикронных частиц на их осаждение в модельных тонковолокнистых фильтрах из стоксова потока. Методом граничной траектории рассчитаны коэффициенты захвата частиц волокном за счет эффектов инерции и зацепления в ячеечной модели фильтра и в ряду параллельных волокон, перпендикулярных направлению потока газа, в интервалах параметров зацепления $R = 0.01{-}1$, чисел Стокса $\mathrm{Stk} = 0{-}20$ и Кнудсена $\mathrm{Kn} = 0{-}1$. Расчеты согласуются с экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0023291223600141, **EDN:** ZPFKYE

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость учета инерционного осаждения субмикронных частиц при расчете фильтров для тонкой фильтрации воздуха возникла в связи с созданием аварийных фильтрующих систем для улавливания частиц тяжелых металлов, совершенствованием фильтрующих материалов из субмикронных волокон, и для расчета пылеемких предфильтров, устанавливаемых перед высокоэффективными фильтрами в многоступенчатых системах сверхтонкого обеспыливания воздуха. Основной задачей теории фильтрации всегда был расчет эффективности при наихудших условиях фильтрации (для наиболее проникающих частиц), которые осаждаются за счет двух механизмов – диффузии и зацепления. Инерцию частиц в теории тонкой фильтрации субмикронных аэрозолей обычно не учитывали, поскольку для испытаний фильтров использовали частицы масляного тумана, для которых число Стокса, характеризующее инерционное осаждение, мало, $\mathrm{Stk} < 0.1$, и влияния инерции нет (средний диаметр волокон 0.5 мкм, скорость потока перед фильтром $U = 3{-}5$ см/с). Число Стокса определяется как [1]

$$\mathrm{Stk} = \frac{\tau_\mathrm{p}}{(a/U)} = \frac{BUm}{a} = \frac{2C_C\rho r_\mathrm{p}^2 U}{9\mu a}, \qquad (1)$$

где $B = C_c/6\pi\mu r_\mathrm{p}$ – подвижность частицы радиуса r_p, $\tau_\mathrm{p} = Bm$ – время релаксации частицы, m – масса частицы с плотностью ρ, $C_c = 1 + (\lambda/r_\mathrm{p})\times[1.257 + 0.4\exp(-1.1 r_\mathrm{p}/\lambda)]$ – эмпирическая поправка Каннингема на скольжение газа на частице, a – радиус волокон фильтра, U – скорость потока перед фильтром, μ – динамическая вязкость воздуха, λ – средняя длина свободного пробега молекул воздуха. В качестве характерных масштабов длины, скорости и времени здесь и далее выбраны a, U и aU^{-1}.

Исследованию осаждения частиц в фильтрах под действием инерции посвящено много работ, в основном для микронных частиц и при большой скорости потока $U > 1$ м/с. Для условий тонкой фильтрации, когда течение газа и осаждение субмикронных частиц не зависят от числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 1$), инерционное осаждение обсуждается в [2–4]. Его учет особенно важен для частиц тяжелых металлов и их оксидов из-за возможности их отскока от тонких волокон при относительно небольших числах Стокса. Этот вопрос был впервые рассмотрен в [5]. Важно уметь рассчитывать инерционное осаждение и для предфильтров, в том числе при малых Stk, поскольку форма осадка частиц на волокне при улавливании инерционных и броуновских частиц разная, из-за чего различается время эксплуатации фильтра, которое определяется как время достижения предельного перепада давления при забивке фильтра частицами [6]. К настоящему времени наиболее подробно разработаны

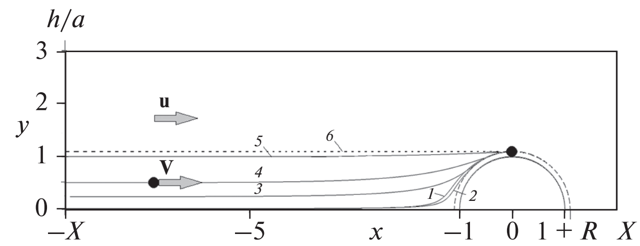

Рис. 1. Граничные траектории инерционных частиц при осаждении из стоксова поперечного потока на волокно в ряду волокон: Stk = 0.01 (*1*), 0.1 (*2*), 5 (*3*), 10 (*4*), 100 (*5*), Stk → ∞, безинерционная частица (*6*); $b = a/h = 1/3$, $R = 0.1$; расчет по (2), (3).

методы расчета эффективности улавливания субмикронных частиц при одновременном действии основных механизмов осаждения (диффузии и зацепления) для фильтров из субмикронных волокон [4, 7]. Однако влияние инерции на осаждение частиц на субмикронные волокна осталось неизученным. Инерционное осаждение частиц с учетом эффекта скольжения газа на волокнах будет рассмотрено в данной статье.

2. МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ЗАХВАТА ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ

Будем рассматривать движение невзаимодействующих аэрозольных частиц в потоке газа в модельном фильтре при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re_p} < \mathrm{Re} \ll 1$) с учетом взаимного влияния соседних волокон. Здесь Re — число Рейнольдса, определенное по диаметру волокна, $\mathrm{Re_p}$ — по диаметру частицы. Символ * относится к размерным величинам. Частицы и волокна в фильтре считаем монодисперсными. Принимаем, что частицы имеют сферическую форму, что внешние силы, действующие на частицу, пренебрежимо малы или отсутствуют, т.е. частицы не несут электростатических зарядов, а их скорость седиментации, обусловленная действием гравитации, пренебрежимо мала (в отличие от случая тяжелых инерционных частиц [8]).

Коэффициент захвата частиц волокном — долю частиц, осевших на волокно из набегающего потока, рассчитываем методом граничной траектории. Уравнение движения частицы имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} + \beta\left(\mathbf{v}^* - \mathbf{u}^*\right) = 0, \tag{2}$$

с начальным условием

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{u}_0^* \text{ при } t = 0, \quad x^* = -X^*,$$

где $\mathbf{v}^*$ — вектор средней скорости частиц, $\mathbf{u}^*$ — вектор скорости среды, t^* — время, $\beta = 1/\tau_\mathrm{p}$ — коэффициент трения. Здесь принято, что скорость частицы на входе в расчетную ячейку равна входной скорости потока $\mathbf{u}_0^*$, что поток направлен по оси Ox и начало координат расположено в центре волокна кругового сечения. Также принято, что коснувшиеся волокна частицы удерживаются вандерваальсовыми силами, и что сдува частиц не происходит. Для режима тонкой фильтрации при малых скоростях потока эти условия реализуются на практике. В безразмерных переменных уравнение (2) и начальное условие принимают вид [9]

$$\mathrm{Stk}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} - \mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

$\mathbf{v} = 1$ при $t = 0$, $\quad x = -X$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3) решалось численно с помощью схемы Рунге—Кутты—Фельберга [10] для модельных фильтров с известным полем течения с учетом эффекта скольжения газа на волокнах. В модели фильтра — ряду параллельных волокон — уравнения Стокса [11] решались в терминах функции тока Ψ, следуя алгоритму, предложенному в работе [12]. Бигармоническое уравнение для функции тока

$$\Delta\Delta\Psi = 0 \tag{4}$$

решалось в протяженной расчетной ячейке (рис. 1). Здесь функция тока связана с компонентами скоростей потока следующими формулами:

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

где r, θ — безразмерные полярные координаты (угол θ отсчитывается от передней осевой линии и направлен по часовой стрелке). Решение бигармонического уравнения находилось в виде конечного ряда, полученного из общего решения этого уравнения. Часть коэффициентов определялась аналитически из граничного условия прилипания $\mathbf{u} = 0$ при Kn = 0 или условия скольжения на поверхности волокна (12) при $\mathrm{Kn} > 0$, где $\mathrm{Kn} = \lambda/a$ — число Кнудсена. Оставшиеся коэффициенты определялись численно из условий на границе внешней области с помощью метода граничной коллокации [13], который применим к задачам со сложной геометрией и с произвольными граничными условиями и, что существенно, не требует дискретизации всей расчетной области. Метод решения подробно изложен в [12].

Для поля скоростей в ячеечной модели были использованы аналитические и численно-аналитические решения работ [14, 15].

В методе граничной траектории расчет каждой траектории заканчивался в момент осаждения частицы на поверхности волокна $r = 1 + R$ или ее пролета за волокно. Здесь $R = r_\mathrm{p}/a$ — параметр зацепления. Выбирая последовательно точки входа в ячейку $\{-X, y_k\}$, определяли ординату y_0, которая соответствовала траектории, ограничивающей область, в пределах которой происходит осаждение частиц (траектории с начальными ординатами $y > y_0$ проходят мимо волокна). Безразмерный коэффициент захвата инерционной частицы определялся по формуле [4]

$$\eta = y_0, \tag{5}$$

где y_0 – ордината граничной траектории на входе в расчетную ячейку при $x = -X$. Граничная траектория отделяет область потока, в которой все входящие частицы осаждаются на волокно. На рис. 1 показан пример граничных траекторий инерционных частиц, осаждающихся из поперечного потока на волокно.

Коэффициент проскока частиц через отдельный ряд параллельных волокон, оси которых отстоят друг от друга на расстоянии $2h$, связан с коэффициентом захвата как [7]

$$\frac{n}{n_0} = 1 - \frac{a}{h}\eta, \tag{6}$$

где n_0 и n – концентрации частиц до и за рядом волокон. Коэффициент проскока частиц через модельный фильтр с толщиной H и плотностью упаковки α связан с коэффициентом захвата и эффективностью улавливания частиц E следующей формулой [4]

$$\frac{n}{n_0} = 1 - E = \exp\left(-2\frac{\alpha H}{\pi a}\eta\right). \tag{7}$$

3. ИНЕРЦИОННОЕ ОСАЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В РЯДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХВОЛОКОН

Модель изолированного ряда параллельных волокон (рис. 1) является наиболее удачной для расчета осаждения инерционных частиц во всем диапазоне чисел Стокса. Расчет инерционного осаждения частиц в стоксовом потоке при обтекании ряда волокон был впервые выполнен в [16]. Были рассчитаны коэффициенты захвата для поля скоростей потока, аналитически выведенного Мияги [17]. В последующих работах (например, в [18]) использовались численные методы для нахождения полей течения и моделирования траекторий частиц в них. Использовав численно-аналитическое решение для поля скоростей, предложенное в [12], нами были проведены расчеты коэффициентов захвата для нескольких значений $b = ah^{-1}$ и параметров зацепления R и проведено сравнение с экспериментальными данными для модельных фильтров, составленных из рядов параллельных волокон.

Сравнение теории с экспериментом

Экспериментальная проверка теоретических расчетов осаждения частиц на цилиндрическое волокно в результате инерционного смещения частиц с линий тока в условиях стесненного течения в модельных фильтрах при малых числах Рейнольдса возможна только в случае тонких волокон. Изготовление таких моделей даже в современных условиях довольно сложно. Первая попытка экспериментально исследовать осаждение частиц благодаря инерции на изолированных рядах параллельных волокон, обтекаемых поперечным стоксовым потоком, была предпринята в [19]. В этой работе параллельно натянутые проволочки в модельном фильтре имели слишком большой диаметр $2a$ = 25 мкм, в результате чего максимальное значение числа Рейнольдса для сохранения автомодельного режима течения составляло Re = 0.54 (т.е. нельзя было увеличивать скорость, чтобы не нарушить симметричное стоксово течение). Параметр Стокса в этих опытах с частицами с $r_\text{p} = 0.6$ мкм изменялся в узком диапазоне Stk = 0.018–0.043, в котором инерция частиц не проявляется.

Вторая попытка экспериментальной оценки инерционного влияния на осаждение частиц была осуществлена в лаборатории Н.А. Фукса в Карповском институте с модельным фильтром, состоящем из рядов более тонких проволочек и с более крупными монодисперсным частицами [16]. Отличительной особенностью модели было строгое равенство расстояний между осями соседних волокон во всех рядах $2h$. На рис. 2–4 приводится сравнение рассчитанных коэффициентов захвата с данными экспериментов, выполненных при Re < 1 на модельном фильтре, составленном из эквидистантных рядов параллельных волокон с $2a = 8.9$ мкм [16]. Небольшое отклонение от расчетных данных связано с тем, что для систем из параллельных волокон невозможно полностью избежать гидродинамического следа после каждого ряда. И, тем не менее, совпадение очень хорошее. Надо отметить, что точность экспериментов в сильной степени зависит от измеряемой величины общей эффективности, которая тем меньше, чем меньше коэффициент захвата, т.е. чем меньше Stk. Поэтому экспериментально не удалось установить величину минимального значения Stk, при котором начинает проявляться инерция. Это будет рассмотрено ниже.

Сравнение инерционных коэффициентов захвата в ряду волокон и в ячеечной модели

В теории фильтрации наиболее популярна ячеечная модель Кувабары [20]. Отметим, что Кувабара полагал, что предложенная им ячеечная модель описывает поле течения в слое параллельных волокон со случайным расположением. Но

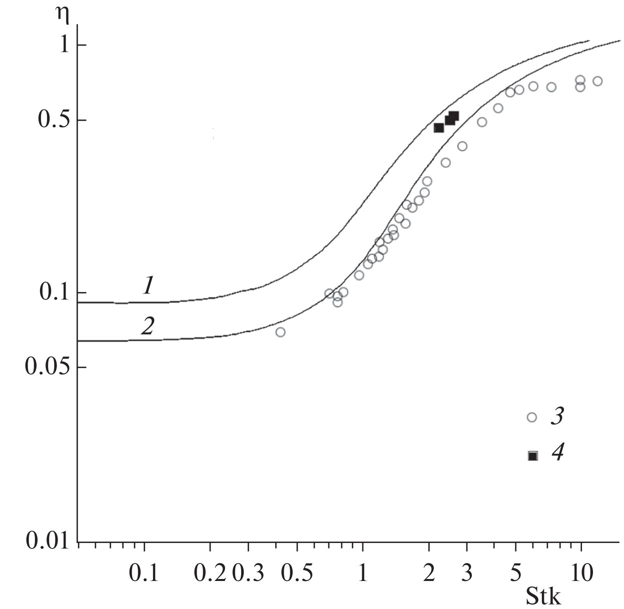

Рис. 2. Зависимости коэффициента захвата частиц волокном в ряду волокон от числа Стокса Stk для R = = 0.38 (*1*), 0.3 (*2*), t = 0.233. Сравнение с экспериментом (рис. 2 в [16]): r_p = 1.37 (*3*), 1.7 (*4*), $2a$ = 8.9, $2h$ = 62.7 мкм.

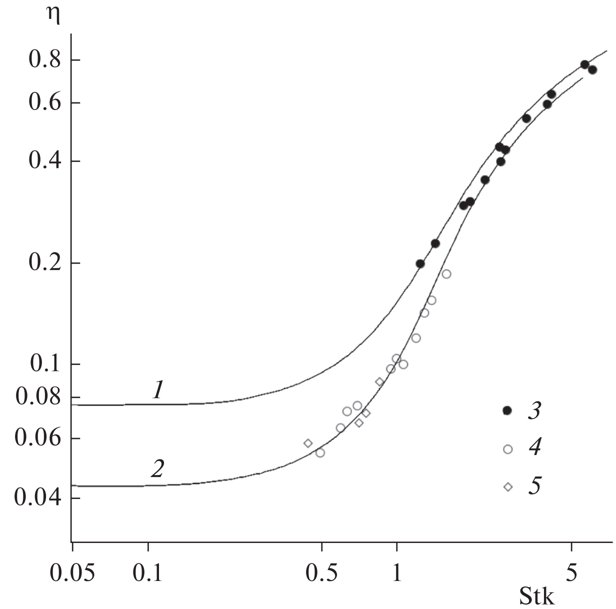

Рис. 3. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления волокном в ряду от Stk для R = 0.34, r_p = 1.5 мкм (*1*) и r_p = 1.1 мкм, R = 0.26 (*2*), $t = \pi b/2 = 0.233$, $2a$ = 8.9 мкм, $2h$ = 62.7 мкм. Сравнение с экспериментом (рис. 3 в [16]): r_p = 1.5 (*3*), 1.18 (*4*), 1.1 мкм (*5*).

он не учел, что в этом случае должны появиться боковые силы. В работах [21, 22] было показано экспериментально, что его формула для силы сопротивления описывает сопротивление волокна только в системе волокон с регулярной гексагональной упаковкой. К такому же выводу позже пришли авторы теоретических работ [23, 24]. Ячеечную модель Кувабары часто использовали для оценок коэффициентов захвата частиц, например, в [8, 25–28].

На рис. 5 дано сравнение коэффициентов захвата частиц в ряду с относительным расстоянием между осями волокон $2\,h/a = 2/b$ и в ячейке Кувабары с плотностью упаковки $\alpha = \pi b^2/4$. Коэффициенты захвата частиц были рассчитаны по методу граничной траектории на основе численного решения уравнения движения частицы (3), записанного в полярных координатах

$$\begin{cases} \mathrm{Stk}\left(\dfrac{dv_r}{dt} - \dfrac{v_\theta^2}{r}\right) + v_r - u_r = 0, \\ \mathrm{Stk}\left(\dfrac{dv_\theta}{dt} + \dfrac{v_\theta v_r}{r}\right) + v_\theta - u_\theta = 0, \end{cases} \tag{8}$$

с начальным условием

$$\mathbf{v}(b_c, \theta_0) = \mathbf{u}(b_c, \theta_0) \text{ при } t = 0, \tag{9}$$

где $v_r = dr/dt$, $v_\theta = r\,d\theta/dt$, $b_c = \alpha^{-1/2}$ – радиус ячейки, θ_0 – угол входа частицы в ячейку. На рис. 5 наглядно продемонстрировано, что совпадение имеет место только при небольших значениях Stk. Очевидно, что использование поля течения в ячеечной модели возможно только для рыхлых модельных фильтров с малой плотностью упаковки α и при небольших Stk. Из рис. 5 видно, что для очень пористых моделей совпадение расчетов для ячейки и ряда сохраняется до более высоких значений Stk. Обратим внимание, что вклад инерционного осаждения для частиц, соизмеримых с толщиной волокна (при $R = 1$) невелик. Более подробно влияние плотности упаковки фильтра на инерционное осаждение частиц проиллюстрировано на рис. 6а, 6б. Здесь представлены зависимости коэффициентов захвата от числа Стокса для ячеечной модели, рассчитанные для $\alpha = 1/36$ ($b_c = 6$) и α = $1/9$ ($b_c = 3$) для разных параметров зацепления R с интервалом 0.1 до $R = 1$. На рисунках видно, что в пределе малых и больших чисел Стокса коэффициент захвата не зависит от Stk. При малых Stk инерция не смещает частицу с линии тока, и она движется как бы “вмороженной” в поток, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Граничная траектория совпадает с линией тока, проходящей на минимальном расстоянии от волокна в точке $r = 1 + R$, $\theta = \pi/2$. Осаждение происходит за счет эффекта зацепления (касания), и коэф-

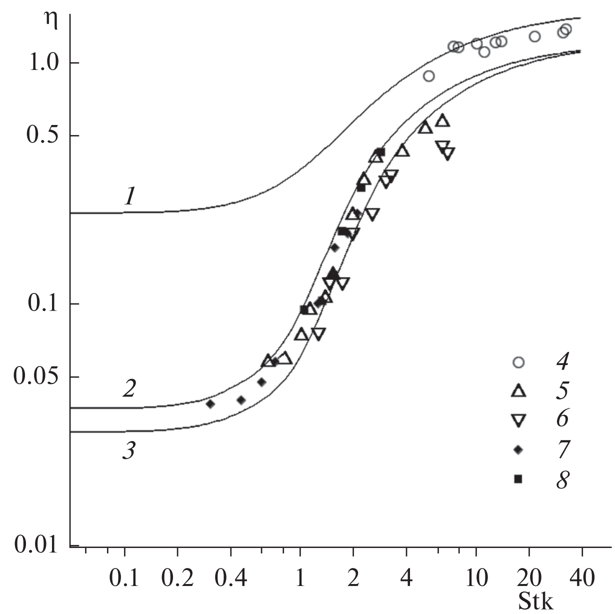

Рис. 4. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления волокном в ряду от Stk для $R = 0.65$, 0.2; ($t = \pi b/2 = 0.233$, $2a = 8.9$ мкм, $2h = 62.7$ мкм, 4 слоя волокон, $R = 0.2$, 0.65; $t = 0.157$, 44 слоя волокон, $R = 0.2$); кривая (*1*) $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.223$, (*2*) $r_p = 1$ мкм, $t = 0.223$; (*3*) $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.157$. Сравнение с экспериментом (рис. 4 в [16]): $r_p = 0.92$ мкм (*7*), 1 мкм, $t = 0.223$ (*5*), 0.94 (*8*), $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.223$ (*4*), $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.157$ (*6*).

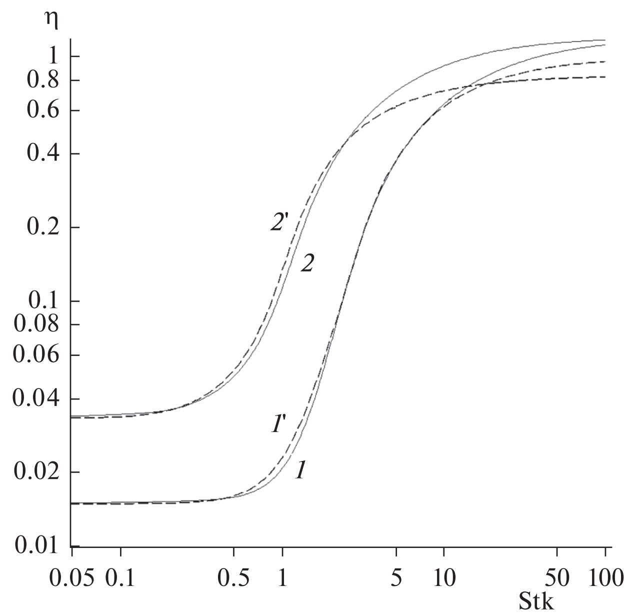

Рис. 5. Зависимости коэффициента захвата частиц с $R = 0.2$ за счет инерции от Stk в ряду параллельных волокон (*1–2*) и в ячеечной модели с той же плотностью упаковки $\alpha = \pi b^2/4$ (*1'–2'*): параметр ряда $b = 0.05$ (*1*, *1'*), 0.1 (*2*, *2'*).

фициент захвата определяется расходом газа в пределах граничной траектории [4]

$$\eta_R = \int_1^{1+R} u_\theta(r,\pi/2)\,dr = (2k_0)^{-1} \times \\ \times\left[(1+R)^{-1} - (1+R) + 2(1+R)\ln(1+R)\right], \quad (10)$$

где гидродинамический фактор равен

$$k_0 = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \alpha - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\alpha^2.$$

В пределе больших чисел Стокса инерция доминирует, и вклад гидродинамического поля течения мал. При “баллистическом” осаждении частицы движутся по прямым траекториям (рис. 1), а коэффициент захвата в этом случае не зависит от Stk и плотности упаковки и равен $\eta = 1 + R$. По результатам расчетов для фильтров с $\alpha = 1/36$, 1/16, 1/9 построена кусочно-непрерывная аппроксимационная формула, применимая при Stk = 0.1–20 и $R = 0.1$–1 (дана в Приложении). Отметим, что при больших числах Стокса расчетные кривые имеют лишь теоретическое значение, т.к. на практике возможен отскок инерционных частиц от поверхности волокна с возвращением их обратно в поток. Также возможны множественные отскоки частиц от волокон с $a \gg r_p$ с последующим притяжением всех или части отскочивших частиц к волокну в поле вандерваальсовых сил [5]. Эти вопросы в данной статье не рассматриваются. Отметим также, что часто используемая формула для расчета инерционного осаждения, предложенная в [29], по признанию авторов этой работы оказалась неверной, о чем они сразу же сообщили в [30], и в дальнейшем это было отмечено в [4]. Авторы [29] сообщили об ошибке из-за того, что их формула (линейная по Stk) не воспроизводит слабый минимум расчетной зависимости η от числа Стокса при малых Stk (см. рис. 6, 9, 10), и что уже при малых Stk начинается резкий рост η. Это связано с тем, что в [29] при выводе формулы был использован приближенный аналитический метод решения, справедливый в пределе малых параметров зацепления $R \ll 1$ и чисел Стокса $\mathrm{Stk} \ll 1$: скорость частицы раскладывалась по малому числу Стокса, после чего авторы ограничивались лишь первым членом разложения, при этом поле скоростей потока также было упрощено для случая предельно малой плотности упаковки $\alpha \ll 1$. Следует подчеркнуть, что указанный минимум $\eta(\mathrm{Stk})$ является артефактом, характерным для приближенной ячеечной модели, в которой точность поля течения (если сравнивать профили скоростей в этой модели со строго рассчитанными в решетках

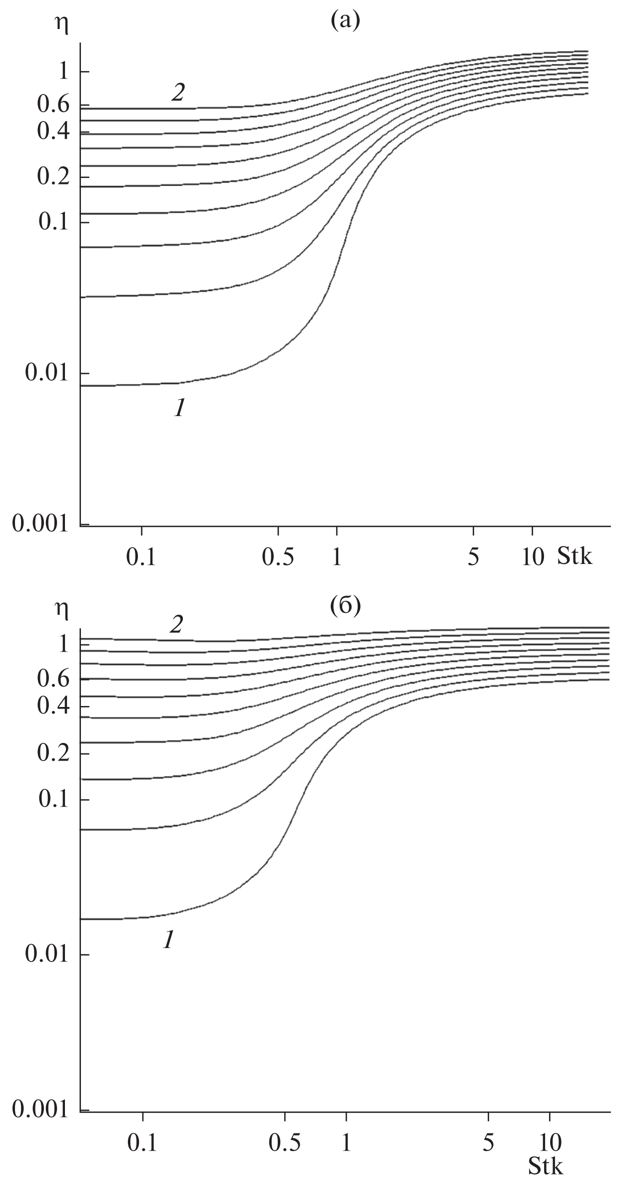

Рис. 6. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления от Stk для волокна в ячейке Кувабары с плотностью упаковки $\alpha = 1/36$ (а), 1/9 (б) для параметров зацепления в диапазоне от $R = 0.1$ (*1*) до 1 (*2*) с интервалом 0.1; $\mathrm{Kn} = 0$.

параллельных волокон) уменьшается при приближении к внешней границе ячейки. Отметим, что здесь минимум $\eta(\mathrm{Stk})$ становится практически незаметным при увеличении радиуса ячейки и в модели ряда волокон не воспроизводится вовсе. Существование минимума $\eta(\mathrm{Stk})$ представляет чисто теоретический интерес, т.к. он находится в области, где инерция не проявляется. Поэтому экспериментальная проверка указанного минимума невозможна.

В области малых Stk следующий вопрос связан с “критическим” числом Стокса $\mathrm{Stk}_{\mathrm{crit}}$, начиная с которого инерция частиц влияет на осаждение. Этот вопрос подробно рассматривался в [31], где было показано, что инерция не проявляется при $\mathrm{Stk} < 0.1$. Это следовало и из многочисленных экспериментов с реальными фильтрами [32]. Действительно, из рис. 2–6 видно, что инерция заметно проявляется только при числах Стокса $\mathrm{Stk} > 0.1$. Отсюда следует, что появляющиеся иногда утверждения о влиянии инерции при меньших значениях Stk не верны. В связи с этим отметим работу [33], в которой в рамках приближенного численно-аналитического метода расчета для ячеечной модели было получено, что увеличение эффективности за счет инерции начинается при $\mathrm{Stk} \sim 0.01$.

4. ОСАЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ УЛЬТРАТОНКИХ ВОЛОКОН

При расчете осаждения частиц на ультратонкие волокна необходимо учесть эффект скольжения газа на волокнах. На это впервые указал Г.Л. Натансон на примере захвата частиц изолированным волокном [34]. Для моделирования осаждения частиц на субмикронные волокна при небольших числах Стокса мы можем использовать поле течения в ячеечной модели, поскольку, как было показано выше, коэффициент захвата в инерционном режиме осаждения частиц в изолированном ряду и в ячеечной модели при числах Стокса $\mathrm{Stk} < 5$ совпадают. В ячеечной модели поле течения с учетом эффекта скольжения газа при малых числах Кнудсена ($\mathrm{Kn} \ll 1$) имеет вид [14]:

$$\Psi = f(r)\sin\theta = \frac{g(r)}{4k_1}\sin\theta, \tag{11}$$

где

$$g(r) = (2 - \alpha + 2\alpha\tau\mathrm{Kn})\frac{1}{r} - 2(1-\alpha)r + $$
$$+ 4(1 + 2\tau\mathrm{Kn})r\ln r - (1 + 2\tau\mathrm{Kn})\alpha r^3,$$
$$k = k_0 + \frac{1}{2}\tau\mathrm{Kn}\left(1 - \alpha^2 + 2\ln\alpha\right).$$

При выводе (11) было использовано граничное условие скольжения (условие Максвелла)

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \tau\mathrm{Kn}\sigma_{r\theta}, \tag{12}$$

где $\sigma_{r\theta}$ – касательное напряжение, $\tau = 1.147$ – коэффициент изотермического скольжения, учитывающий взаимодействие газовых молекул с поверхностью волокна [35], а компоненты скоростей выражаются через функцию тока как:

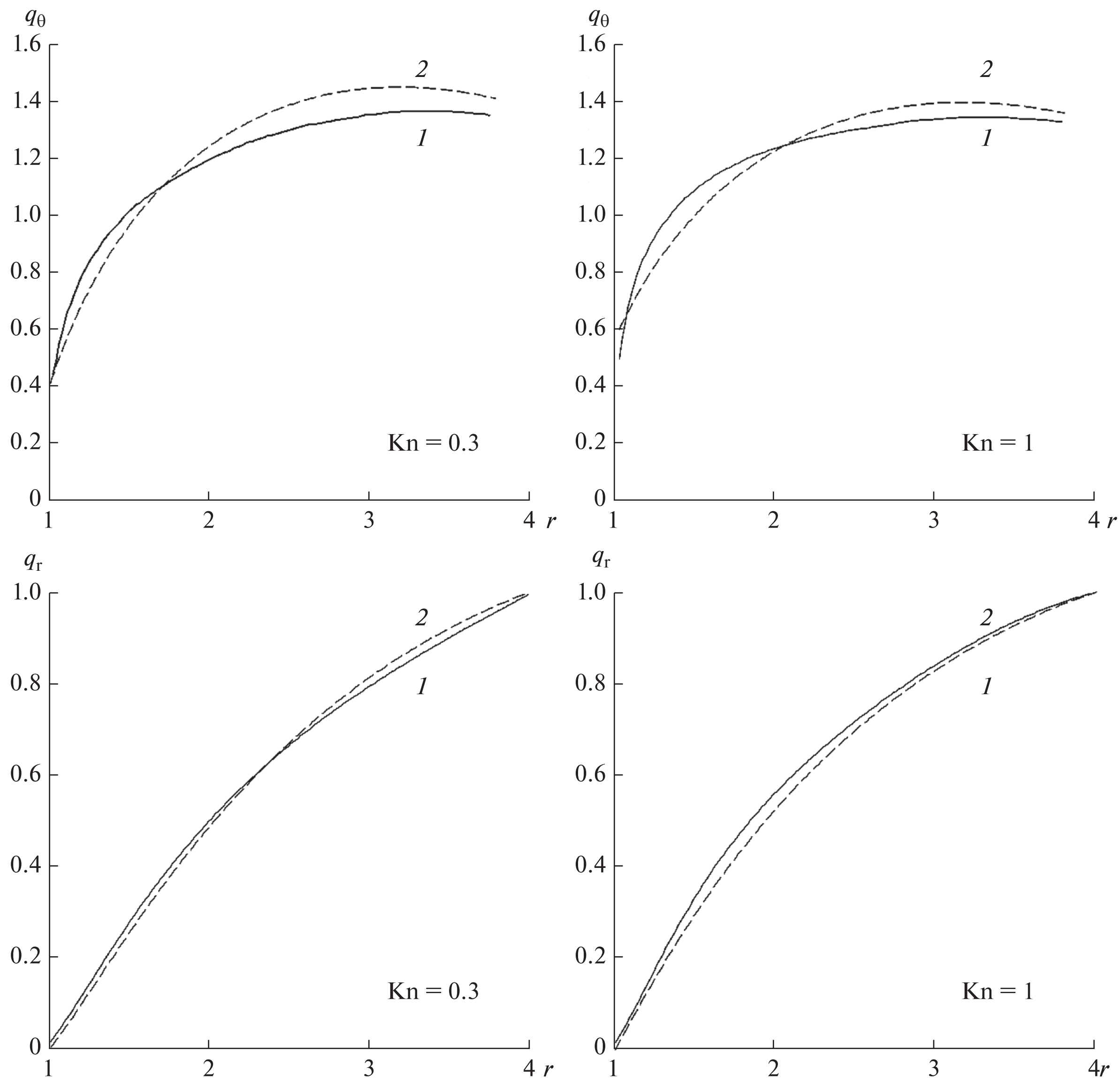

Рис. 7. Зависимости $u_\theta/\sin\theta$ и $-u_r/\cos\theta$ от радиальной координаты в ячейке с ультратонким волокном для разных Kn: *1* – по (16) (кинетическая теория [15]), *2* – по (11) (течение со скольжением [14]), $\alpha = 1/16$.

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -q_r(r)\cos(\theta),$$
$$u_\theta = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = q_\theta(r)\sin\theta. \quad (13)$$

В этих формулах скорости выражены через радиальные функции, графики которых приведены на рис. 7. Из (11), (13) нетрудно найти скорость скольжения на поверхности волокна при $r = 1$. Она равна

$$u_{\text{slip}} = \frac{2\tau\text{Kn}}{k}(1-\alpha)\sin\theta. \quad (14)$$

Из (14) следует, что скорость скольжения газа на волокне увеличивается с ростом числа Кнудсена и с ростом плотности упаковки волокон в фильтре.

Решение для поля течения в ячеечной модели, применимое в широком диапазоне чисел Кнудсена, было впервые получено в [15] численно-аналитическим методом в рамках кинетической теории разреженных газов в приближении Бхатнагара–Гросса–Крукса для плотностей упаковки фильтров, равных $\alpha = 1/36, 1/16, 1/9$. Сравнение зависимостей для компонент скорости потока (13) с найденными в [15] приведено на рис. 7 и 8 для плотности упаковки $\alpha = 1/16$. Здесь и далее рассматриваем пример фильтра с этим значением α, поскольку большинство реальных высокоэффективных фильтров имеет близкую плотность упаковки. Будем использовать уточненные ап-

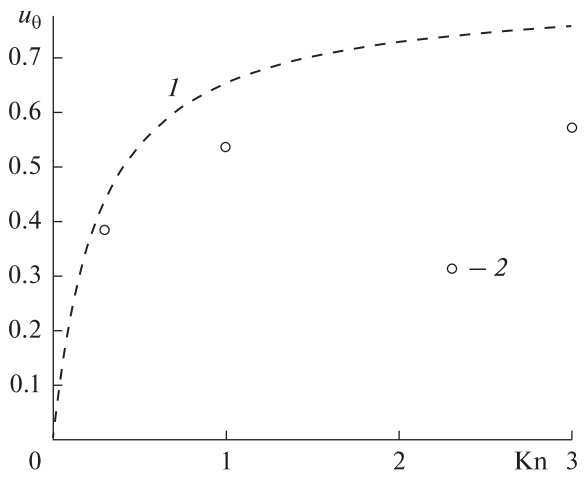

Рис. 8. Сравнение тангенциальных скоростей потока (скоростей скольжения на поверхности волокна) при $\theta = \pi/2$ и $r = 1$ от Kn, *1* – по (11) (течение со скольжением, $\mathrm{Kn} \ll 1$) [14], точки *2* – по (16) (численно-аналитическое решение [15], промежуточные и большие Kn), $\alpha = 1/16$.

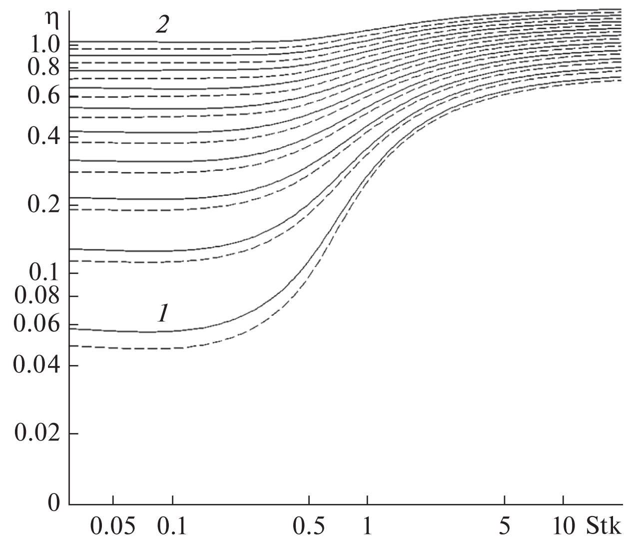

Рис. 9. Зависимости коэффициентов захвата за счет инерции и зацепления от Stk: сплошные линии – с учетом поля скоростей (15), (16) [15], пунктирные – (11), (13) [14], для параметров зацепления в диапазоне $R = 0.1$ (*1*) до $R = 1$ (*2*) с интервалом 0.1; ячеечная модель, $\alpha = 1/16$, $\mathrm{Kn} = 0.3$.

проксимации для компонент скоростей потока при обтекании ультратонкого волокна в ячейке Кувабары, построенные нами по расчетным данным [15] для $\alpha = 1/16$:

$$q_r = A + Br + Cr^{-1} + Dr^{-2} + Er^2 + F\ln r, \qquad (15)$$

$$q_\theta = a + br^{-11} + cr^{-2} + dr^2 + e\ln r, \qquad (16)$$

где коэффициенты приведены в табл. 1 (средняя относительная погрешность аппроксимации не превышает 0.1%). Эти же формулы описывают течение разреженного газа вблизи волокна любого радиуса.

Отметим, что для расчета сопротивления фильтра решение (11), полученное с граничным условием скольжения (12), применимо только при $\mathrm{Kn} < 0.01$. Важно подчеркнуть, что полученная зависимость силы сопротивления F_{slip} [14] качественно и количественно отличается от экспериментальных данных практически во всем диапазоне чисел Кнудсена при $\mathrm{Kn} > 0.01$, совпадая с ними лишь в пределе бесконечно малых значений Kn. Поэтому для расчета силы сопротивления волокна следует либо использовать метод линейной экстраполяции величины $1/F_{\mathrm{slip}}$ в область больших чисел Кнудсена [4], либо пользоваться более строгим решением, полученным в [15].

В то же время расчетные профили скоростей разреженного газа в модели со скольжением при $\mathrm{Kn} > 0.01$ качественно согласуются (в отличие от F_{slip}) с данными экспериментов и расчетов в рамках кинетической теории. Различие между ними появляется и увеличивается с ростом Kn (при малых Kn скорости почти совпадают). При этом на самой обтекаемой поверхности решение для те-

Таблица 1. Коэффициенты в аппроксимационных формулах (15), (16) для ячеечной модели с $\alpha = 1/16$

Kn	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0.3	1.362954	−0.285438	−2.082320	0.988784	0.0287823	0.557373
1	12.282844	4.939722	−22.377315	5.451608	−0.280035	− 15.371139
3	5.469471	0.802511	−8.656095	2.419047	−0.029152	− 3.751793

Kn	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
0.3	1.0148095	−0.283836	−0.320505	−0.0264392	0.648570
1	1.321618	−0.272466	−0.499161	−0.0144089	0.283646
3	1.177181	−0.685839	0.099157	−0.019197	0.351284

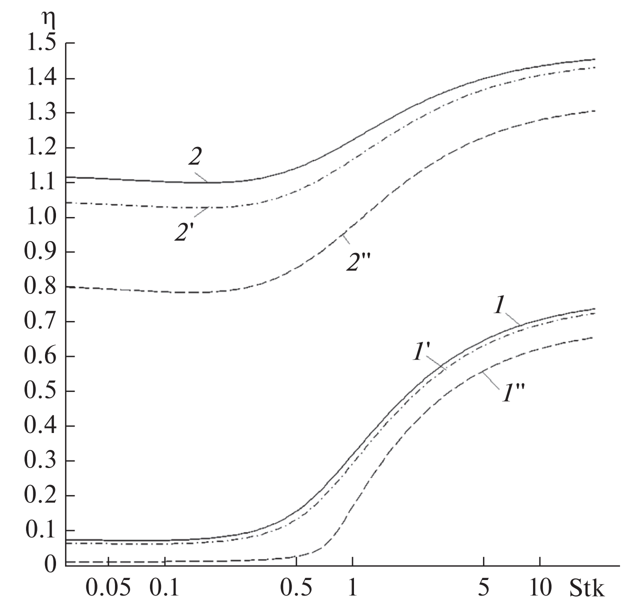

Рис. 10. Зависимости коэффициентов захвата частиц волокном за счет инерции и зацепления для частиц конечного размера при $R = 0.1$ (*1*, *1'*, *1"*) и $R = 1$ (*2*, *2'*, *2"*) от Stk с учетом эффекта скольжения газа при Kn = = 1 (*1*, *1'*, *2*, *2'*) и Kn = 0 (*1"*, *2"*): *1*, *2* – расчет для поля скоростей (16) (кинетическая теория, [15]), *1'*, *2'* – (15) (течение со скольжением, [14]), *1"*, *2"* – поля скоростей [20]; ячеечная модель Кувабары, $\alpha = 1/16$.

чения со скольжением дает верхнюю оценку тангенциальной скорости (рис. 7, 8). Это согласуется с результатами работ по расчету обтекания разных тел [36] и течения в каналах в рамках кинетической теории. Таким образом, простое решение (11) для поля скоростей может быть использовано для приближенных оценок осаждения частиц на ультратонкие волокна или на волокна любого радиуса в условиях течения разреженного газа при Kn ~ 0.1 во всем интервале α. При увеличении числа Кнудсена расхождение расчетов по (11) и (15), (16) становится более заметным.

После уточнения поля течения в окрестности нановолокон в модельном фильтре было рассчитано инерционное осаждение частиц с учетом скольжения газа на волокне. Расчеты коэффициентов инерционного осаждения для полей течения (11) [14] и (15) [15] даны на рис. 9 и 10. Из представленных данных видно, что, чем больше параметр зацепления, тем больше влияние скольжения. В пределе малых чисел Стокса расчетные кривые выходят на плато, соответствующее коэффициенту захвата за счет эффекта зацепления η_R. Величина η_R при Kn > 0 дается следующей формулой, полученной из (9) и (16):

$$\eta_R = aR + \frac{b}{10}\left[1 - \frac{1}{(1+R)^{10}}\right] + c\left(\frac{R}{1+R}\right) - \\ - \frac{d}{3}\left[1 - (1+R)^3\right] + e\left[(1+R)\ln(1+R) - R\right]. \quad (17)$$

Отличие расчетов для полей течения работ [14] (течение со скольжением) и [15] (кинетическая теория) заметно лишь при Kn > 1. При меньших числах Кнудсена поле скоростей (11), (13) вполне применимо для оценок η. Для расчетных зависимостей коэффициента захвата от Stk и R для Kn = 0.3 и Kn = 1 при $\alpha = 1/16$ были построены соответствующие аналитические аппроксимации (см. Приложение), позволяющие оценивать влияние эффекта скольжения газа на инерционное осаждение частиц. Например, для фильтра с толщиной H = 0.5 мм, плотностью упаковки волокон $\alpha = 1/16 = 0.0625$ и радиусом волокон $a = 0.22$ мкм эффективность улавливания частиц без учета эффекта скольжения (Kn = 0) при $R = 0.1$ и Stk = 0.2 составит $E = 0.977$ (соответственно, проскок $n/n_0 = 0.023$), а с учетом (Kn = 0.3) увеличится до $E = 0.997$ (проскок понизится на порядок $n/n_0 = 0.003$). Таким образом, учет эффекта скольжения газа совершенно необходим при вычислении инерционного осаждения аэрозольных частиц на тонкие волокна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено влияние инерции субмикронных частиц на их осаждение в тонковолокнистых фильтрах при малых числах Рейнольдса в широком диапазоне чисел Стокса Stk при разных значениях чисел Кнудсена Kn и параметров зацепления R. Методом граничной траектории рассчитаны коэффициенты захвата частиц волокном в модельных фильтрах, в качестве которых выбраны ячеечная модель Кувабары и ряд параллельных монодисперсных волокон, перпендикулярных направлению потока газа. Показано, что инерционное осаждение частиц в ячеечной модели фильтра с пористостью, характерной для реальных фильтров, заметно ниже, чем в отдельном ряду волокон, при числах Стокса Stk > 3. Показано также сильное влияние эффекта скольжения газа на субмикронных волокнах на осаждение частиц при малых и промежуточных числах Стокса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По результатам расчетов инерционного осаждения частиц конечного размера в ячеечной модели фильтра с разной плотностью упаковки с полем скоростей (13) построена кусочно-непрерывная аппроксимационная формула, применимая при $R = 0.1–1$ и Stk = 0.1–20:

Таблица 2. Коэффициенты в аппроксимационной формуле для коэффициента захвата (П.2): Stk = 0.1–1, Kn = 0

α	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1/36	–1.1276	1.1533	0.0137	0.5345	1.3074
1/16	0.0902	–0.0901	1.5576	0.720	1.4263
1/9	0.2054	–0.4328	0.80	1.2180	1.5109
α	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
1/36	10.4482	–9.2319	0.0953	–6.6631	2.4142
1/16	–0.6516	0.3747	–0.90	0.3161	–0.9419
1/9	2.0606	3.3182	12.0940	–8.7507	1.9218

Таблица 3. Коэффициенты в (П.3): Kn = 0, Stk = 1–20

α	f_0	f_1	f_2	g_0	g_1	g_2
1/36	0.5174	0.2130	0.2539	0.0542	0.4117	0.9383
1/16	0.4316	0.2149	0.70	0.0754	0.5626	0.9517
1/9	0.3116	0.2167	1.0587	0.0817	0.6794	0.9706

$$\eta = \eta_R + \eta_I. \tag{П.1}$$

Здесь часть коэффициента захвата за счет инерции (поправка на инерцию к зацеплению) η_I в диапазоне значений Stk = 0.1–1 равна

$$\eta_I = \frac{A}{0.9}(\mathrm{Stk} - 0.1)\mathrm{Stk}^B, \tag{П.2}$$

где

$$A = c_0 + c_1 R^{c_2} + c_3 R \exp(-c_4 R),$$

$$B = d_0 + d_1 R^{d_2} + d_3 R^{0.8} \exp(-d_4 R),$$

а в диапазоне Stk = 1–20 величина η_I аппроксимирована как

$$\eta_I = A + C(\mathrm{Stk} - 1)/[1 + D(\mathrm{Stk} - 1)], \tag{П.3}$$

где

$$C = f_0 - f_1 R^{f_2}, \quad D = \left[g_0 + g_1(R - 0.1)^{g_2}\right]/R.$$

Коэффициенты c, d, f, g в (П.2)–(П.3) были рассчитаны при Kn = 0 для плотностей упаковки α = 1/36, 1/16, 1/9. Они приведены в табл. 2, 3. Величина η_R при Kn = 0 рассчитывается по формуле (10). Также с привлечением функций (П.2), (П.3) для того же интервала параметров зацепления были построены аппроксимации для коэффициента захвата с учетом эффекта скольжения газа на волокнах для Kn = 0.3 и Kn = 1 (см. табл. 4, 5). Здесь мы ограничились плотностью упаковки α = 1/16, характерной для высокоэффективных фильтров. Эти аппроксимации имеют разные погрешности в разном интервале параметров. Средняя относительная погрешность формулы наилучшего приближения (П.2) на всем множестве расчетных данных для α = 1/36, 1/16, 1/9 не превышает 5%, 2% и 0.4% соответственно. Для формул с учетом эффекта скольжения эта величина не превышает 0.3%. Средняя относительная погрешность формул (П.1) лежит в интервале 1–10%. Аппроксимации (П.1) не воспроизводят минимум зависимости коэффициента захвата от числа Стокса, который, как показано в данной работе при расчете инерции в ряду волокон, является артефактом, характерным для приближенной ячеечной модели. Предложенные формулы применимы для уль-

Таблица 4. Коэффициенты в формулах (П.2): Stk = 0.1–1, α = 1/16

Kn	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
0.3	0.1911	–0.0715	1.8413	0.2861	2.6467
1	0.2302	–0.1470	1.290	0.2871	2.8971
Kn	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
0.3	0.9483	–0.2451	0.4067	–1.7133	1.7133
1	0.4535	1.4634	2.2784	–1.0172	0.0985

Таблица 5. Коэффициенты в (П.3): Stk = 1–20, $\alpha = 1/16$

Kn	f_0	f_1	f_2	g_0	g_1	g_2
0.3	0.350	–0.1773	0.8939	0.0663	0.5543	0.9540
1	0.0645	0.5507	0.9641	0.3179	–0.1727	0.8689

тратонких волокон, соизмеримых по диаметру со средней длиной свободного пробега молекул воздуха, либо для волокон любого радиуса в условиях течения разреженного газа.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fuchs N.A.* The Mechanics of Aerosols. N.Y.: Dover, 1989.
2. *Davies C.N.* Air Filtration. N.Y.: Academic Press, 1973.
3. *Brown R.C.* Air Filtration. Oxford: Pergamon Press, 1993.
4. *Kirsch A.A., Stechkina I.B.* The theory of aerosol filtration with fibrous filters, Ch. 4, in Fundamentals of Aerosol Science / Ed. by Shaw D.T. N.Y.: Wiley-Interscience. 1978. P. 165–256.
5. *Chernyakov A.L., Kirsch A.A., Kirsch V.A.* Elastic vibrations of a fiber due to impact of an aerosol particle and their influence on the efficiency of fibrous filters // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. № 5. P. 056303. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056303
6. *Стечкина И.Б., Кирш В.А.* Оптимизация параметров аэрозольных волокнистых фильтров // Коллоид. журн. 2001. Т. 63. № 4. С. 517–522. https://doi.org/10.1023/A:1016762107083
7. *Кирш В.А., Кирш А.А.* Улавливание субмикронных аэрозольных частиц фильтрами из нановолокон // Коллоид. журн. 2023. Т. 85. № 1. С. 38–46. https://doi.org/10.1134/S1061933X22600476
8. *Кирш В.А.* Инерционное осаждение тяжелых аэрозольных частиц в волокнистых фильтрах // Теор. основы хим. технологии. 2005. Т. 39. № 1. С. 50–55. https://doi.org/10.1007/s11236-005-0028-1
9. *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971.
10. *Hairer E., Norsett S., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2-nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
11. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.
12. *Wang C.Y.* Stokes slip flow through a grid of circular cylinders // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 9. P. 3358–3360. https://doi.org/10.1063/1.1499127
13. *Kolodziej J.A.* Review of application of boundary collocation methods in mechanics of continuous media // Solid Mechanics Archives. 1987. V. 12. № 4. P. 187–231.
14. *Pich J.* Pressure drop of fibrous filters at small Knudsen numbers // Ann. Occup. Hyg. 1966. V. 9. № 1. P. 23–27. https://doi.org/10.1093/annhyg/9.1.23
15. *Ролдугин В.И., Кирш А.А., Емельяненко А.М.* Моделирование аэрозольных фильтров при промежуточных числах Кнудсена // Коллоид. журн. 1999. Т. 61. № 4. С. 530–542.
16. *Кирш А.А., Стечкина И.Б.* Инерционное осаждение аэрозолей в модельных фильтрах при малых числах Рейнольдса // Коллоид. журн. 1977. Т. 39. № 1. С. 36–43.
17. *Miyagi T.* Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row of equal circular cylinders // J. Phys. Soc. Japan. 1958. V. 13. № 5. P. 493–496. https://doi.org/10.1143/JPSJ.13.493
18. *Muller T.K., Meyer J., Kasper G.* Low Reynolds number drag and particle collision efficiency of a cylindrical fiber within a parallel array // J. Aerosol Sci. 2014. V. 77. № 11. P. 50–66. https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2014.07.007
19. *Gallily I.* On the filtration of aerosols by filter models of various porosities // J. Colloid Sci. 1957. V. 12. № 2. P. 161–172.
20. *Kuwabara S.* The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in viscous flow at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1959. V. 14. № 4. P. 527–532. https://doi.org/10.1143/JPSJ.14.527
21. *Kirsch A.A., Fuchs N.A.* The fluid flow in a system of parallel cylinders perpendicular to the flow direction at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1967. V. 22. P. 1251–1255. https://doi.org/10.1143/JPSJ.22.1251
22. *Kirsch A.A., Fuchs N.A.* Studies of fibrous aerosol filters – II. Pressure drops in systems of parallel cylinders // Ann. Occup. Hyg. 1967. V. 10. № 1. P. 23–30. https://doi.org/10.1093/annhyg/10.1.23
23. *Головин А.М., Лопатин В.А.* Течение вязкой жидкости в двоякопериодических рядах цилиндров // ПМТФ. 1969. Т. 9. № 2. С. 99–105. https://doi.org/10.1007/BF00913184
24. *Sangani A.S., Acrivos A.* Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer // Int. J. Multiphase Flow. 1982. V. 8. № 3. P. 193–206. https://doi.org/10.1016/0301-9322(82)90029-5
25. *Yeh H.-C., Liu B.Y.H.* Aerosol filtration by fibrous filters – I. Theoretical // J. Aerosol Sci. 1974. V. 5. № 2. P. 191–204. https://doi.org/10.1016/0021-8502(74)90049-4
26. *Yeh H.-C.* A fundamental study of aerosol filtration by fibrous filters. Ph.D. Thesis. Minneapolis: University of Minnesota, 1972.
27. *Ramarao B.V., Tien C., Mohan S.* Calculation of single fiber efficiencies for interception and impaction with superposed Brownian motion // J. Aerosol Sci. 1994.

V. 25. № 2. P. 295–313.
https://doi.org/10.1016/0021-8502(94)90081-7

28. *Кирш В.А.* Инерционное осаждение аэрозольных частиц в волокнистых фильтрах // Коллоид. журн. 2004. Т. 66. № 5. С. 613–618.
https://doi.org/10.1023/B:COLL.0000043835.00525.83
29. *Стечкина И.Б., Кирш А.А., Фукс Н.А.* Исследования в области волокнистых аэрозольных фильтров // Коллоид. журн. 1969. Т. 31. № 1. С. 121–126.
30. *Стечкина И.Б., Кирш А.А., Фукс Н.А.* Влияние инерции на коэффициент захвата аэрозольных частиц на цилиндрах при малых числах Стокса // Коллоид. журн. 1970. Т. 32. № 3. С. 467.
31. *Левин Л.М.* Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей, М.: Изд. АН СССР, 1961.
32. *Wong J.B., Ranz W.E., Johnstone H.F.* Collection efficiency of aerosol particles and resistance to flow through fiber mats // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 2. P. 161–170.
https://doi.org/10.1063/1.1722328
33. *Flagan R.C., Seinfeld J.H.* Fundamentals of Air Pollution Engineering, Ch. 7. P. 441. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1988.
34. *Натансон Г.Л.* Влияние скольжения на эффект касания при захвате амикроскопических частиц цилиндром из потока // Коллоид. журн. 1960. Т. 24. № 1. С. 52–54.
35. *Albertoni S., Cereignani C., Gutusso L.* Numerical evaluation of the slip coefficient // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 7. P. 993–996.
https://doi.org/10.1063/1.1706857
36. *Zhao S., Povitsky A.* A hybrid molecular and continuum method for low-Reynolds-number flows // Nonlinear Analysis. 2009. V. 71. № 12. P. e2551–e2564.
https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.069