КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 87, № 4, с. 300–320

УДК 5:532.6:537.8:544.772

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ

© 2025 г. А. И. Григорьев[1, *], Н. Ю. Колбнева[2], С. О. Ширяева[2]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, пр-т Вернадского, д. 101, к. 1, Москва, 119526 Россия

[2]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, Ярославль, 150000 Россия

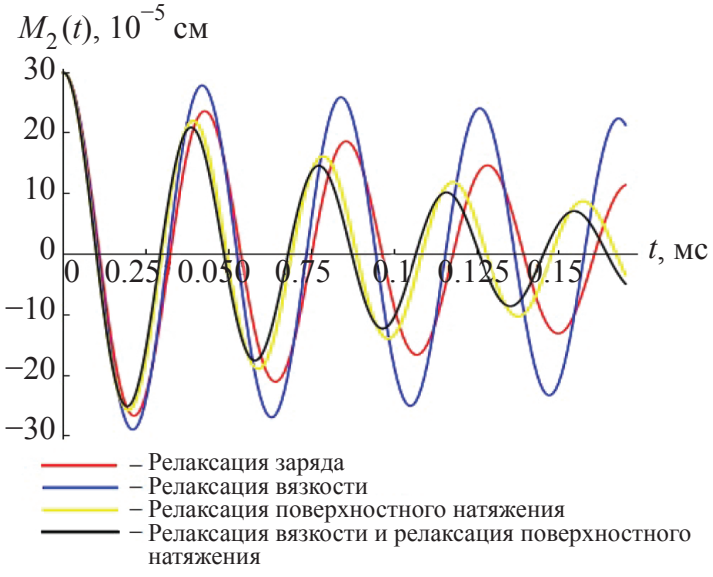
**e-mail: grigorai@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.03.2025 г.
После доработки 24.04.2025 г.
Принята к публикации 29.04.2025 г.

Проведено теоретическое исследование влияния релаксационных процессов в воде на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли воды, которая принимается вязкой и несжимаемой. Выведено теоретическое аналитическое выражение дисперсионного уравнения осциллирующей и излучающей капли, имеющей вид комплексного алгебраического выражения пятой степени. Показано следующее: эффект релаксации заряда в осциллирующей заряженной капле воды оказывает влияние на интенсивность электромагнитного излучения ею через посредство электропроводности воды. Наибольшая интенсивность электромагнитного излучения характерна для капли идеально проводящей жидкости, она на порядок величины выше интенсивности излучения капли жидкости с конечной проводимостью; наименьшая интенсивность излучения будет у капли диэлектрической жидкости с вмороженным зарядом. Эффект релаксации поверхностного натяжения влияет на электромагнитное излучение заряженной осциллирующей капли через посредство нарушения упорядоченности поверхностных молекул воды и изменения величины коэффициента поверхностного натяжения. Эффект релаксации вязкости воды не оказывает заметного влияния на затухающие капиллярные осцилляции и электромагнитное излучение облачных капель.

Ключевые слова: осциллирующая заряженная капля, релаксация, электромагнитное излучение, декремент затухания

DOI: , **EDN:**



ВВЕДЕНИЕ

Изучение капиллярных осцилляций заряженной капли находит широкое применение в различных направлениях науки: от разработки жидкометаллических источников ионов и каплеструйной печати до проблем грозового электричества и химической технологии [1–4]. Тем не менее некоторые вопросы до сих пор мало изучены. Для капель субмикронных и микронных размеров существенную роль в их осцилляциях могут играть релаксационные явления в жидкости [5, 6]. Однако попытки теоретических и экспериментальных исследований влияния релаксационных эффектов на особенности реализации капиллярных осцилляций конечных объемов реальной жидкости (см. [7–11]) не внесли полной ясности в обсуждаемую проблему. В этой связи представляется актуальным исследовать одновременное влияние конечной проводимости жидкости, ее вязкоупругих свойств и эффекта динамического поверхностного натяжения на спектр капиллярных осцилляций заряженной капли.

Что касается эффекта релаксации заряда, то его механизм определяется конечной скоростью переноса носителей заряда. Такой релаксационный эффект реализуется только в вязкой жидкости. Это объясняется тем, что на границе раздела сред напряжения электрической природы, обусловленные релаксационными движениями, компенсируются лишь вязкими напряжениями.

Как известно, эффекты релаксации вязкости и поверхностного натяжения возникают на малых временных интервалах [12–15]. Собственно говоря, упругое поведение жидкости обнаруживается в случае, если время внешнего силового воздействия мало по сравнению с характерным временем релаксации ($\tau_1 \sim 10^{-5}$ с [13]) и меньше или сравнимо с характерными молекулярными временами ($10^{-12} - 10^{-11}$ с при комнатных температурах).

Отметим, что суть эффекта релаксации вязкости заключается в том, что в результате внешних кратковременных силовых воздействий вязкая жидкость упруго деформируется, а возникающие после прекращения этих воздействий сдвиговые напряжения затухают с временем релаксации τ_1. При этом энергия упругих деформаций превращается в кинетическую энергию поля скоростей движения жидкости с последующей диссипацией в тепловую энергию за счет вязкости [14, 16].

В этом случае вязкоупругие свойства жидкости математически описываются введением комплексной кинематической вязкости ν по известной формуле Максвелла [15]:

$$\nu\left(\omega_n\right) = \frac{\nu_0}{1 - i\omega_n\tau_1}, \qquad (1)$$

где i – мнимая единица, ν_0 – коэффициент кинематической вязкости для нулевой частоты внешнего воздействия, τ_1 – характерное время релаксации вязкости (время, за которое возникающие в жидкости упругие деформации возвращаются к нулевому уровню).

Из (1) следует, что в области низких частот, отвечающих неравенству $\omega_n\tau_1 \ll 1$, вязкая жидкость не обладает упругими свойствами. В случае высоких частот при выполнении соотношения $\omega_n\tau_1 \gg 1$ получаем весьма вязкую жидкость, схожую с твердым телом.

Поверхность границы жидкости оказывает ориентирующее действие на диполи молекул воды [16], а именно, за счет электростатического квадрупольно-дипольного взаимодействия соседних молекул воды приповерхностные диполи выстраиваются параллельно друг другу так, что их отрицательно заряженные концы направлены наружу. Таким образом, свободная поверхностная энергия и коэффициент поверхностного натяжения (определяемый свободной поверхностной энергией, приходящейся на единицу площади поверхности) изменяются от максимальных значений в случае хаотического ориентирования приповерхностных диполей до равновесных значений в состоянии упорядоченного расположения диполей.

В общем случае давление сил поверхностного натяжения связывает изменение давления под искаженной капиллярным волновым движением поверхностью (что аналогично нормальному напряжению) с ее кривизной $u\left(t\right)$. Ситуация с динамическим поверхностностным натяжением аналогична ситуации с вязко-упругостью [11], когда нормальное напряжение определяется историей деформации. Тогда, применяя принцип суперпозиции Больцмана [11], запишем выражение для мгновенного изменения капиллярного давления на поверхности $\Delta P_1\left(t\right)$ через историю изменения ее кривизны $u\left(t\right)$ в виде:

$$\Delta P_1\left(t\right) = \int\limits_{-\infty}^{t} \sigma\left(t - \tau\right)\frac{du\left(\tau\right)}{d\tau}d\tau\,. \qquad (2)$$

Учтем временную зависимость динамического коэффициента поверхностного натяжения:

$$\sigma\left(t\right) = \sigma_0 + \sigma_* \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),\ \sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0\,. \qquad (3)$$

где τ_2 – характерное время релаксации поверхностного натяжения (время, за которое мгновенно деформированный приповерхностный слой жидкости возвращается в равновесное состояние). σ_* – поправка к равновесной величине σ_0, связанная с отклонением мгновенно деформируемой

структуры приповерхностного слоя от равновесной; σ_∞ – максимальное значение коэффициента поверхностного натяжения для области высоких частот, удовлетворяющих неравенству $\omega_n\tau_2 \gg 1$.

Из (3) видно, что в начальный момент времени $t = 0$ коэффициент поверхностного натяжения принимает максимальное значение $\sigma_\infty = \sigma_0 + \sigma_*$ вследствие полной разупорядоченности ориентации диполей. По прошествии времени релаксации $t = \tau_2$ восстанавливается параллельное расположение диполей отдельных молекул, а коэффициент поверхностного натяжения уменьшается до равновесной величины σ_0.

В итоге, подставляя (3) в (2) и применяя прямое преобразование Фурье к уравнению (2), найдем частотный динамический коэффициент поверхностного натяжения $\sigma\left(\omega_n\right)$, выражаемый формулой Максвелла [11]:

$$\sigma\left(\omega_n\right) = \sigma_\infty - \frac{\sigma_*}{1 - i\omega_n\tau_2} = \sigma_0 - \frac{i\omega_n\sigma_*\tau_2}{1 - i\omega_n\tau_2}. \quad (4)$$

Согласно экспериментальным данным [18], максимальное значение динамического поверхностного натяжения σ_∞ на четверть величины превышает его равновесное значение σ_0.

Отметим, что в уравнениях (1), (4) временная зависимость амплитуд капиллярных осцилляций капли представляется в экспоненциальном виде: $\sim \exp\left(-i\omega_n t\right)$.

Экспериментальные значения времен релаксации для широкого класса жидкостей, включая воду, при нормальных условиях составляют $\tau_1 \sim 10^{-5}$ с [13], $\tau_2 \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ с [11, 19]. Примем для определенности, что характерное время релаксации поверхностного натяжения τ_2 порядка характерного времени релаксации вязкости τ_1 [12], т.е. $\tau_1 = \tau_2 \sim 10^{-5}$.

В нижеследующем рассмотрении проведем анализ дисперсионного уравнения для капиллярных осцилляций заряженной капли реальной жидкости с учетом релаксационных эффектов: заряда, вязкости и динамического поверхностного натяжения.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Пусть сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ, коэффициентами кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения σ обладает электрическим зарядом Q. В отсутствии возмущений заряд рассредоточен по поверхности капли с постоянной поверхностной плотностью $\kappa^{(0)}$. Будем считать, что удельная проводимость жидкости $\gamma_1 \equiv \gamma$ и диэлектрическая проницаемость ε_1. В качестве окружающей среды примем вакуум: $\gamma_2 = 0,\ \varepsilon_2 = 1$.

Отсутствие объемного заряда в капле проводится в предположении, что максвелловское время релаксации заряда $\tau_r \equiv \dfrac{\varepsilon_1}{4\pi\gamma}$ существенно меньше характерного гидродинамического времени $\tau_g \equiv \left(\dfrac{R^3\rho}{\sigma}\right)^{1/2}$: $\tau_r \ll \tau_g$. Оценка показывает, что для облачных капель с типичными размерами от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм и средними характеристиками $\rho = 1$ г/см^3, $\sigma = 73$ дин/см, $\gamma = 5\cdot10^7$ СГСЭ, $\varepsilon_1 = 80$, характерное время перераспределения заряда τ_r ниже характерного гидродинамического времени τ_g на один-два порядка величины.

В сферической системе координат $\left(r, \theta, \varphi\right)$ с началом в центре масс капли уравнение свободной поверхности в произвольный момент времени t имеет вид:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t), \quad (5)$$

где $\xi(\theta, t)$ – малое осесимметричное возмущение равновесной сферы, вызванное капиллярным волновым движением теплового происхождения: $\max\left|\xi\right| \ll R$. Величина отношения амплитуды осцилляций $\left|\xi\right|$ к радиусу R образует малый параметр $\varepsilon \equiv \left|\xi\right| / R << 1$.

Поле скоростей течения жидкости $\vec{V}$, порождаемое капиллярными осцилляциями, имеет тот же порядок малости, что и возмущение $\xi(\theta, t)$: $\left|\vec{V}\right| \sim \left|\xi(\theta, t)\right| \sim \varepsilon$.

В учебном пособии Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [15] на стр. 188 в первом абзаце параграфа «Очень вязкие жидкости» отмечено, что уравнение Навье-Стокса применимо для жидкостей, периоды движения которых существенно превосходят молекулярные времена. Для большинства облачных капель (размерами от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм) периоды осцилляций основной моды ($n = 2$) изменяются от $T = 1.36\cdot10^{-6}$ с при $R = 3$ мкм до $T = 4.27\cdot10^{-5}$ с при $R = 30$ мкм. Это на шесть порядков величины выше характерных молекулярных времен. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что жидкость является ньютоновской, а ее движение описывается уравнением Навье-Стокса.

Чтобы выяснить влияние вязкости жидкости на частоту осцилляций капли, введем безразмерный коэффициент кинематической вязкости $\mu \equiv \nu\sqrt{\rho/\sigma R}$, зависящий не только от величины кинематической вязкости ν, но и от плотности жидкости ρ, коэффициента поверхностного натяжения σ и характерного линейного размера капли R. Оценим безразмерную вязкость μ на примере облачных

капель средними характеристиками $\rho = 1$ г/см^3, $\sigma = 73$ дин/см, $\nu = 0.01$ см^2/с. Как показывают оценки, величина безразмерного параметра μ изменяется от $\mu = 0.021$ при $R = 30$ мкм до $\mu \approx 0.068$ при $R = 3$ мкм. Отсюда следует, что для малого безразмерного коэффициента μ ($\mu \ll 1$) внутренняя среда осциллирующих облачных капель является маловязкой.

Кроме того, в работе Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [15] на стр. 188 во втором абзаце указано, что жидкость, подвергшаяся внешнему силовому воздействию с достаточно высокой частотой ω, удовлетворяющей неравенству $\omega \cdot \tau_1 \gg 1$ (τ_1 – характерное время релаксации вязкости), обладает свойствами твердого тела. Однако в случае малых частот ω, когда $\omega \cdot \tau_1 \ll 1$, жидкость ведет себя как обычная вязкая жидкость.

Учтем, что время релаксации вязкости оценивается как $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ с, а частота осцилляций внутриоблачных капель зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ при возбуждении второй моды $n = 2$ изменяется от $\omega_2 = 147 \cdot 10^3$ рад/с при $R = 30$ мкм до $\omega_2 = 4.64 \cdot 10^6$ рад/с при $R = 3$ мкм. На основании этого рассчитаем величину произведения $\omega_2 \cdot \tau_1$, принимающего значения от $\omega_2 \cdot \tau_1 = 1.47$ при $R = 30$ мкм до $\omega_2 \cdot \tau_1 = 46.4$ при $R = 3$ мкм. В результате имеем $\omega_2 \cdot \tau_1 > 1$. Примечательно, что для наиболее мелких облачных капель выполняется условие $\omega_2 \cdot \tau_1 \gg 1$, из которого следует упругое восстановление формы капли после прекращения напряжения.

Теперь обратимся к каплям больших размеров. Для дождевых капель зарядом $Q = 7 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ с характерными размерами от $R = 0.25$ мм до $R = 3.5$ мм частота осцилляций второй моды $n = 2$ варьируется от $\omega_2 = 6.1 \cdot 10^3$ рад/с при $R = 0.25$ мм до $\omega_2 = 117$ рад/с при $R = 3.5$ мм. В этом случае величина произведения $\omega_2 \cdot \tau_1$ изменяется от $\omega_2 \cdot \tau_1 = 6.1 \cdot 10^{-2}$ при $R = 0.25$ мм до $\omega_2 \cdot \tau_1 = 1.17 \cdot 10^{-3}$ при $R = 3.5$ мм. Отсюда получаем неравенство $\omega_2 \cdot \tau_1 \ll 1$, из которого следует наличие вязкого течения внутренней среды дождевых капель.

Иными словами, четко очерченной границы между упругостью и вязкостью жидкости не существует, а имеется нечетко выделенный диапазон частот внешнего воздействия, в котором жидкость обладает «промежуточными» вязкоупругими свойствами при наличии крайних ситуаций: упругих свойств, характерных для твердого тела (в случае малых облачных капель), либо вязким течением жидкости (внутри капель больших размеров).

Если изложить сказанное выше простыми словами, то получится следующее: вещество может обладать как упругими свойствами, так и вязкими, а в промежутке между этими крайними ситуациями есть еще одна область, в которой вещество обладает и теми, и другими свойствами одновременно. В такой области вещество уместно называть вязкоупругим, когда одно из свойств уменьшается при удалении от одной из границ, то другое – увеличивается.

Принимая во внимание вышеприведенные крайние ситуации для наиболее мелких внутриоблачных капель, подчиняющихся условию $\omega_2 \cdot \tau_1 \gg 1$, и дождевых капель при выполнении неравенства $\omega_2 \cdot \tau_1 \ll 1$, на основе интерполяции величины $\omega_2 \cdot \tau_1$ при различных радиусах R придем к заключению, что внутреннюю среду облачных капель можно считать вязкоупругой. Это обстоятельство связано с тем, что после прекращения силового воздействия накопленная энергия упругих деформаций переходит в кинетическую энергию течения вязкой жидкости, которая, в свою очередь рассеивается в виде тепла.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи о капиллярных осцилляциях заряженной капли вязкой жидкости конечной электропроводности состоит из системы уравнений электрогидродинамики:

уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}, \nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \Delta \vec{V}, \qquad (6)$$

уравнения непрерывности

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0, \qquad (7)$$

уравнения непрерывности и волнового уравнения для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_j$, следующие из уравнений Максвелла

$$\mathrm{div}\,\vec{D}_j = 0,\ \vec{D}_j = \varepsilon_j \vec{E}_j, \qquad (8)$$

$$\Delta \vec{E}_j - \frac{\varepsilon_j \mu_j}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_j}{\partial t^2} = 0,\ \left(j = 1; 2\right). \qquad (9)$$

Учтем также граничные условия к (6)–(9):

в начале координат:

$$r \to 0:\ \vec{V} \to 0,\ \vec{E}_1 \to 0, \qquad (10)$$

на бесконечности:

$$r \to \infty:\ \vec{E}_2 \to 0, \qquad (11)$$

на свободной поверхности капли $F \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$:

кинематическое:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\vec{V},\nabla F\right)=0, \qquad (12)$$

динамические:

для касательных, составляющих тензора напряжений:

$$\Pi_{ex\,\tau}-\Pi_{in\,\tau}-\rho\nu\left[\left(\vec{\tau},\left(\vec{n},\nabla\right)\vec{V}\right)+\left(\vec{n},\left(\vec{\tau},\nabla\right)\vec{V}\right)\right]=0, \qquad (13)$$

$$\Pi_{in\,\tau}=\frac{\varepsilon_1}{4\pi}E_{1n}\cdot E_{1\tau},\ \Pi_{ex\,\tau}=\frac{\varepsilon_1}{4\pi}E_{2n}\cdot E_{2\tau},$$

для нормальной составляющей тензора напряжений

$$P-2\rho\nu\left(\vec{n},\left(\vec{n},\nabla\right)\vec{V}\right)+P_{Q}=P_{\sigma}, \qquad (14)$$

$$P_{Q}=\frac{1}{8\pi}\left(E_{2n}^2-E_{2\tau}^2-\varepsilon_1\left(E_{1n}^2-E_{1\tau}^2\right)\right),\ P_{\sigma}=\sigma\mathrm{div}_{\Sigma}\vec{n}.$$

Нижний индекс «in» относится к капле, а нижний индекс «ex» – к внешней среде.

Для учета эффекта релаксации заряда зададим дополнительные электрические граничные условия на поверхности капли $F\equiv r-R-\xi(\theta,t)=0$:

скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции:

$$D_{2n}-D_{1n}=4\pi\kappa, \qquad (15)$$

непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля:

$$E_{2\tau}=E_{1\tau}, \qquad (16)$$

баланса плотности поверхностного заряда [20]:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}-\gamma\left(\vec{n},\vec{E}_1\right)+\kappa\left(\vec{n},\vec{V}\right)\mathrm{div}_{\Sigma}\vec{n}+\kappa\mathrm{div}_{\Sigma}\vec{V}_{\tau}+ +b\ \kappa\mathrm{div}_{\Sigma}\vec{E}_{1\tau}=0. \qquad (17)$$

Кроме того, потребуем, чтобы форма возмущенной капли удовлетворяла условиям постоянства объема и отсутствия движения центра масс:

$$\int_V r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3,\ \int_V\vec{r}\ r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi=0, \qquad (18)$$

$$V=[0\le r\le R+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi],$$

которые, как будет показано ниже, сказываются на ограничении спектра колебательных мод, участвующих в формировании возмущения равновесной сферы.

Введем также условие сохранения заряда капли:

$$\oint_S\kappa dS=Q,\ S=[r=R+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi]. \qquad (19)$$

В выписанных математических соотношениях физические величины, отмеченные нижним индексом «1», относятся к внутренней среде капли, а индексом «2» – к внешней среде.

В выражениях (6)–(19) введены обозначения: $\mathrm{div}_{\Sigma}\vec{A}=\left(\mathrm{div}\vec{A}-\left(\vec{n},\frac{\partial\vec{A}}{\partial n}\right)\right)\Big|_{\Sigma}$; c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме; b – подвижность носителей электрического заряда (ионов обоих знаков); κ – поверхностная плотность собственного заряда капли; μ_j – магнитная проницаемость j-й среды (в нижеследующих рассуждениях примем $\mu_1=\mu_2=1$); $\vec{E}_j$, $\vec{D}_j$ – векторы напряженности и индукции электрического поля; E_{jn}, $E_{j\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора напряженности электрического поля; D_{jn} – нормальная компонента вектора электрической индукции; $\vec{V}_{\tau}=\vec{V}-\left(\vec{n},\vec{V}\right)\vec{n}$ – вектор скорости течения жидкости на поверхности капли, лежащий в касательной плоскости; $\vec{E}_{1\tau}=\vec{E}_{1\tau}-\left(\vec{n},\vec{E}_{1\tau}\right)\vec{n}$ – вектор напряженности электрического поля на поверхности капли, лежащий в касательной плоскости.

В уравнении (17) локальное изменение плотности электрического заряда на поверхности капли происходит за счет: нормальной компоненты тока проводимости (*второе слагае*мое); изменения площади поверхности капли в результате ее тепловых осцилляций (*третье слаг*аемое); перемещения заряженных частиц касательными *составляющими волнового движения жидкости (четвертое слагаемое)* под действием касательной компоненты электрического поля (*пятое слага*емое).

Нужно отметить, что в механизме выравнивания электрического потенциала вдоль свободной поверхности в процессе капиллярных осцилляций капли пренебрегается диффузией носителей электрического заряда (ионов) вследствие ее малости. Диффузионное движение ионов становится существенным лишь для плохо проводящих жидкостей.

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

Решение задачи (6)–(19) отыскивается путем разложения по малому параметру в рамках теории возмущений [22] в первом порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций $\varepsilon\equiv|\xi|/R$. Для этого все искомые величины $\xi(\theta,t)$, $\vec{V}$, κ, $\vec{E}_j$ $(j=1;2)$, P, P_{Q}, P_{σ}, $\Pi_{in\,\tau}$, $\Pi_{ex\,\tau}$ представим в виде

асимптотических разложений по ε с точностью до членов $\sim \varepsilon$.

$$\xi(\theta,t) = \xi^{(1)}(\theta,t) + O(\varepsilon^2),\ \vec{V} = \vec{V}^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$
$$\kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$
$$\vec{E}_j = \vec{E}_j^{(0)} + \vec{E}_j^{(1)} + O(\varepsilon^2),\ \left(j = 1; 2\right),$$
$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$
$$P_Q = P_Q^{(0)} + P_Q^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$
$$P_\sigma = P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$
$$\Pi_{i\,\tau} = \Pi_{i\,\tau}^{(0)} + \Pi_{i\,\tau}^{(1)} + O(\varepsilon^2),\ \left(i = in, ex\right),$$

где номер верхнего индекса в круглых скобках определяет степень малости соответствующих компонент по амплитуде осцилляций ε. Подчеркнем, что индексом «0» обозначены величины, относящиеся к невозмущенной сферической капле.

Решение задачи в нулевом порядке малости по ε определяет невозмущенную сферическую каплю $r = R$ с равномерно распределенным поверхностным зарядом плотностью $\kappa^{(0)} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$, создающим в окрестности равновесной сферы электростатическое поле напряженностью $\vec{E}_2^{(0)} = \dfrac{Q}{r^2}\vec{e}_r$ ($\vec{E}_1^{(0)} = 0$), стремящееся к нулю на бесконечном удалении от капли.

Формулировка задачи (6)–(19) в первом порядке по безразмернй амплитуде осцилляций ε сводится к виду [8]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P^{(1)} + \nu\Delta\vec{V},\ \mathrm{div}\vec{V} = 0, \qquad (20)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}_j^{(1)} = 0,\ \Delta\vec{E}_j^{(1)} - \frac{\varepsilon_j}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_j^{(1)}}{\partial t^2} = 0,\ \left(j = 1; 2\right), \qquad (21)$$

$$r \to 0:\ \vec{V} \to 0,\ \vec{E}_1^{(1)} \to 0;\ r \to \infty:\ \vec{E}_2^{(1)} \to 0, \qquad (22)$$

$$r = R:\ -\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} + \left(\vec{V}, \vec{e}_r\right) = 0, \qquad (23)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi:\ \Pi_{ex\,\varphi}^{(1)} - \Pi_{in\,\varphi}^{(1)} - \rho\nu\left[\begin{matrix}\left(\vec{e}_\varphi, \left(\vec{e}_r, \nabla\right)\vec{V}\right) + \\ + \left(\vec{e}_r, \left(\vec{e}_\varphi, \nabla\right)\vec{V}\right)\end{matrix}\right] = 0, \qquad (24)$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta:\ \Pi_{ex\,\theta}^{(1)} - \Pi_{in\,\theta}^{(1)} - \rho\nu\left[\begin{matrix}\left(\vec{e}_\theta, \left(\vec{e}_r, \nabla\right)\vec{V}\right) + \\ + \left(\vec{e}_r, \left(\vec{e}_\theta, \nabla\right)\vec{V}\right)\end{matrix}\right] = 0, \qquad (25)$$

$$P^{(1)} - 2\rho\nu\left(\vec{e}_r, \left(\vec{e}_r, \nabla\right)\vec{V}\right) + P_Q^{(1)} = P_\sigma^{(1)}, \qquad (26)$$

$$-2\frac{Q}{R^3}\xi(\theta,t) + E_{2r}^{(1)} - \varepsilon_1 E_{1r}^{(1)} = 4\pi\kappa^{(1)}, \qquad (27)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi:\ E_{2\varphi}^{(1)} = E_{1\varphi}^{(1)}, \qquad (28)$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta:\ \frac{Q}{R^3}\frac{\partial\xi\left(\theta,t\right)}{\partial\theta} + E_{2\theta}^{(1)} = E_{1\theta}^{(1)}, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial\kappa^{(1)}}{\partial t} - \gamma E_{1r}^{(1)} + \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\vec{e}_r, \vec{V}(r,\theta,t)\right)\mathrm{div}\,\vec{e}_r + \\ + \frac{Q}{4\pi R^2}\mathrm{div}_\Sigma\left[\vec{V} + b\vec{E}_1^{(1)}\right] = 0, \qquad (30)$$

$$3R^2\int_0^\pi \xi\left(\theta,t\right)\sin\theta d\theta = 0,$$
$$4R^3\int_0^\pi \xi\left(\theta,t\right)\cos\theta\sin\theta d\theta = 0, \qquad (31)$$

$$2\pi R^2\int_0^\pi\left(\kappa^{(1)} + \frac{Q}{2\pi R^3}\xi\left(\theta,t\right)\right)\sin\theta d\theta = 0, \qquad (32)$$

где $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ – орты сферической системы координат, $\vec{\tau}_{0\theta}$, $\vec{\tau}_{0\varphi}$ – единичные векторы касательной к меридианам и параллелям равновесной сферы, $E_{jr}^{(1)}$, $E_{j\theta}^{(1)}$, $E_{j\varphi}^{(1)}$ – проекции вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_j^{(1)}$ на орты сферической системы координат.

Для решения векторных уравнений (20), (21) воспользуемся методом операторной скаляризации, подробно описанным в [22]. Для чего разложим поле скоростей течения жидкости $\vec{V}$, а также поправок к напряженностям электрического поля внутри и вне капли $\vec{E}_j^{(1)}$, связанных с возмущением равновесной поверхности, на сумму трех ортогональных векторных полей.

$$\vec{V} = \nabla\psi_1 + \left(\vec{r}\times\nabla\right)\psi_2 + \left(\nabla\times\left(\nabla\times\vec{r}\right)\right)\psi_3, \qquad (33)$$

$$\vec{E}_j^{(1)} = \nabla\Phi_{j1} + \left(\vec{r}\times\nabla\right)\Phi_{j2} + \left(\nabla\times\left(\nabla\times\vec{r}\right)\right)\Phi_{j3}, \qquad (34)$$
$$\left(j = 1; 2\right),$$

где ψ_m, Φ_{jm} $\left(m = 1, 2, 3\right)$ – скалярные поля.

Иными словами, искомые векторные функции $\vec{V}$, $\vec{E}_j^{(1)}$ представляются в виде суперпозиции потенциальной (первое слагаемое в (33), (34) при $m = 1$), вихревой тороидальной (второе слагаемое в (33), (34) при $m = 2$) и вихревой полоидальной (третье слагаемое в (33), (34) при $m = 3$) составляющих.

В случае стоячих капиллярных волн будем считать, что изменения во времени скалярных функций $\xi(\theta,t)$, ψ_m описываются экспоненциальным законом:

$$\xi(\theta,t) \sim \exp\left(-i\omega_n t\right),\ \psi_m \sim \exp\left(-i\omega_n t\right).$$

Здесь i – мнимая единица, ω_n – частота n-й моды капиллярных осцилляций капли, в общем случае комплексная: $\omega_n = \mathrm{Re}\,\omega_n \pm i\,\mathrm{Im}\,\omega_n$, где реальная компонента $\mathrm{Re}\,\omega_n$ имеет смысл собственной частоты осцилляций, а мнимая компонента определяет декремент затухания при $\mathrm{Im}\,\omega_n < 0$ или инкремент капиллярной неустойчивости капли по отношению к ее собственному электрическому заряду при $\mathrm{Im}\,\omega_n > 0$.

Осесимметричное возмущение равновесной капли $\xi(\theta,t)$, вносимое капиллярным волновым движением, с учетом интегральных условий (31) запишем в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi(r,\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp\left(-i\omega_n t\right) P_n\left(\mu\right),\ \mu \equiv \cos\theta, \quad (35)$$

где $P_n\left(\mu\right)$ – полином Лежандра n-го порядка.

Подстановка разложений (33), (34) в уравнения (20), (21) позволяет получить их скалярный аналог.

Таким образом, решения скаляризованной системы уравнений (20) с учетом условий ограниченности (22) принимают вид:

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-i\omega_n t\right) r^n P_n\left(\mu\right), \quad (36)$$

$$\psi_m = \sum_{n=0}^{\infty} B_{nm} \exp\left(-i\omega_n t\right) I_n\left(r\sqrt{\frac{-i\omega_n}{\nu}}\right) P_n\left(\mu\right),$$
$$\left(j = 2;\ 3\right), \quad (37)$$

где $I_n\left(x\right)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [23].

В (37) нижний индекс m в амплитудном коэффициенте B_{nm} помечает вихревую тороидальную ($m = 2$) или вихревую полоидальную ($m = 3$) компоненты гидродинамического потенциала. Связь неизвестных коэффициентов A_n, B_{nm} с амплитудами возмущения M_n находится из кинематического (23) и динамического для касательной составляющей тензора напряжений (24), (25) граничных условий. Обратим внимание, что амплитудные коэффициенты A_n, B_{nm} в (36), (37) и M_n в (35) имеют первый порядок малости по ε.

Из решения электрических уравнений (21) с учетом разложения (34), подробно изложенного в [8], получено, что векторы напряженности электрического поля внутри $\vec{E}_1^{(1)}$ и вне капли $\vec{E}_2^{(1)}$, удовлетворяющие условиям ограниченности (22), описываются лишь полоидальными составляющими:

$$\vec{E}_1^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp\left(-i\omega_n t\right)\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r} n\left(n+1\right) j_n\left(\varepsilon_1^{1/2} kr\right) P_n\left(\mu\right)\vec{e}_r + \\ + \left(\frac{1}{r} j_n\left(\varepsilon_1^{1/2} kr\right) + \frac{\partial j_n\left(\varepsilon_1^{1/2} kr\right)}{\partial r}\right)\frac{\partial P_n\left(\mu\right)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\end{array}\right],$$

$$\vec{E}_2^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp\left(-i\omega_n t\right)\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r} n\left(n+1\right) h_n^{(2)}\left(kr\right) P_n\left(\mu\right)\vec{e}_r + \\ + \left(\frac{1}{r} h_n^{(2)}\left(kr\right) + \frac{\partial h_n^{(2)}\left(kr\right)}{\partial r}\right)\frac{\partial P_n\left(\mu\right)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\end{array}\right],$$

где $j_n\left(z\right)$ – сферическая функция Бесселя первого рода [23], $h_n^{(2)}\left(z\right)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода или функция Ханкеля [23]. Граничные условия (27)–(30), (32) позволяют выразить неизвестные коэффициенты C_n, D_n первого порядка малости по ε через амплитуды искажения равновесной сферы M_n.

Подставляя полученные решения в динамическое граничное условие для нормальной составляющей тензора напряжений (26) аналогично тому, как это было проделано в [8], сразу же выпишем кубическое дисперсионное уравнение в пределе малой вязкости, связывающее комплексную частоту осцилляций капли ω_n с номером колебательной моды n:

$$\omega_n^3 + il_1\omega_n^2 - \omega_n\left(l_2 + il_{21}\right) - il_3 + l_{31} = 0,\ n \geq 2, \quad (38)$$

$$l_1 \equiv \left(4\pi\gamma + b\frac{Q}{R^3}\left(n+1\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1\right)^{-1} +$$
$$+\ 2\frac{\nu}{R^2}\left(n-1\right)\left(2n+1\right),$$

$$l_2 \equiv \omega_{n0}^2 + 2\frac{\nu}{R^2}\left(4\pi\gamma + b\frac{Q}{R^3}\left(n+1\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1\right)^{-1} \times$$
$$\times\ \left(n-1\right)\left(2n+1\right),$$

$$\omega_{n0}^2 \equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} n\left(n-1\right)\left(n+2\right)\left(1 - \frac{W}{\left(n+2\right)}\right),$$

$$l_{21} \equiv W\frac{\sigma}{\rho R^3}n^2(n+1)\left(\frac{2^n(n-1)!}{(2n)!}\right)^2(kR)^{2n+1},$$

$$l_3 \equiv \omega_{n0}^2\left(4\pi\gamma + b\frac{Q}{R^3}(n+1)\right)\left(1+\frac{1}{n}+\varepsilon_1\right)^{-1},$$

$$l_{31} \equiv W\frac{\sigma}{\rho R^3}\left(4\pi\gamma + b\frac{Q}{R^3}(n+1)\right)\left(1+\frac{1}{n}+\varepsilon_1\right)^{-1} \times$$

$$\times\ n^2(n+1)\left(\frac{2^n(n-1)!}{(2n)!}\right)^2(kR)^{2n+1},$$

где ω_{n0} – собственная частота капиллярных осцилляций заряженной проводящей капли, $k \equiv \dfrac{\mathrm{Re}\,\omega_n}{c}$ – волновое число, $W \equiv \dfrac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}$ – параметр Релея, характеризующий критерий электростатической устойчивости n-ой моды осциллирующей проводящей капли по отношению к собственному заряду: $W < (n+2)$. Капля претерпевает электростатическую неустойчивость при $W \geq (n+2)$, когда электрическое давление превышает давление капиллярных сил. В этом случае сброс избыточного заряда сопровождается деформацией родительской капли в сфероид и эмиссией с вершин капли струек в виде дочерних сильно заряженных мелких капелек [5].

Интересно отметить, что в реальных земных условиях большая часть капель естественного происхождения имеют малые заряды, значения которых ниже одной десятой Релеевского предела. При этом появление электрического заряда на отдельных каплях связано с механизмами их электризации при захвате воздушных ионов и фазовых переходах, перераспределения зарядов в результате дробления, коагуляции и столкновения капель разных размеров [24].

Алгебраическое уравнение (38) для капли оказывается вырожденным по азимутальному параметру m, тогда как для струи оно зависит от азимутального числа m [23]. Такое положение складывается потому, что все искомые величины для капли раскладываются в ряды по нормированным сферическим функциям (осесимметричным полиномам Лежандра в случае $m = 0$), а для струи по модифицированным функциям Бесселя [23].

Подстановка выше записанных асимптотических разложений в систему электрогидродинамических уравнений (6)–(9) с граничными (10)–(17) и дополнительными (18), (19) условиями позволяет разложить уравнения в ряд Тейлора в окрестности равновесной сферы. В результате, собирая вместе слагаемые одного порядка малости по ε, несложно выделить краевые задачи в нулевом и первом приближениях по ε.

Следует иметь в виду, что при выводе уравнения (38) принимается во внимание тот факт, что влияние вязкости на капиллярные осцилляции капли на основной (второй) моде $n = 2$ оценивается безразмерным коэффициентом кинематической вязкости: $\mu \equiv \dfrac{\nu}{\mathrm{Re}\,\omega_2 R^2} = \nu\sqrt{\dfrac{\rho}{\sigma R}}$. При этом осцилляции имеют место, когда $\mu << 1$, т.е. вязкость мала. Если же $\mu >> 1$ (величина вязкости велика), то осцилляции гасятся вязкостью. Так, для капель естественного происхождения (туманных, облачных и дождевых) с типичными размерами от $R = 1$ мкм до $R = 3.5$ мм и средними характеристиками $\rho = 1$ г/см^3, $\sigma = 73$ дин/см, $\nu = 0.01$ см^2/с безразмерная вязкость варьируется от $\mu = 2\cdot10^{-3}$ при $R = 3.5$ мм до $\mu \approx 0.117$ при $R = 1$ мкм. Из приведенных оценок видно, что значения параметра μ удовлетворяют условию $\mu << 1$, поэтому жидкость считается маловязкой и капли осциллируют.

Можно отметить, что при $\varepsilon_1 \to \infty$, в уравнении (38) исчезнут слагаемые, содержащие множитель $\left(4\pi\gamma + b\dfrac{Q}{R^3}(n+1)\right)\left(1+\dfrac{1}{n}+\varepsilon_1\right)^{-1}$, характеризующий конечность скорости переноса носителей электрического заряда. Физически это определяет мгновенное перераспределение электрических зарядов по возмущенной поверхности. Исходя из этого, легко получим предельный переход к известному квадратичному дисперсионному уравнению для капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей маловязкой жидкости, затухание которых обусловлено потерями запасенной энергии на генерацию электромагнитных волн [7, 8].

Для нижеследующего изложения будем полагать, что потери кинетической энергии потенциальной составляющей поля скоростей течения жидкости, идущие на электромагнитное излучение при ускоренном движении локального заряда поверхности осциллирующей капли, пренебрежимо малы по сравнению с диссипацией кинетической энергии полоидальной компоненты поля скоростей движения вязкой жидкости.

В самом деле, для наименьшей облачной капли радиуса $R = 3$ мкм, несущей собственный заряд $Q = 5\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16Q_{\text{кр}}$, $Q_{\text{кр}}$ – критическое значение заряда), при частоте осцилляций $\mathrm{Re}\,\omega_2 = 4.56\cdot10^6$ рад/с на основной ($n = 2$) моде декремент затухания $\eta_2 = 1\cdot10^{-33}$ рад/с,

связанный с излучением электромагнитных волн, на 39 порядков величины ниже декремента вязкого затухания, равного $\eta_1 = 0.56\cdot10^6$ рад/с. Внутриоблачная капля размером $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 1.1\cdot10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.11Q_{кр}$), осциллирующая на частоте $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)} = 146\cdot10^3$ рад/с, обладает декрементом затухания на электромагнитное излучение $\eta_2 = 7\cdot10^{-38}$ рад/с, который на 41 порядок величины меньше декремента вязкого затухания $\eta_1 = 5.6\cdot10^3$ рад/с [8].

Таким образом, в (38) при $c\to\infty$ слагаемые l_{21}, l_{31} обращаются в ноль, а само уравнение (38) приводится к кубическому дисперсионному уравнению для капиллярных осцилляций заряженной капли маловязкой жидкости с конечной электропроводностью:

$$\omega_n^3 + il_1\omega_n^2 - \omega_n l_2 - il_3 = 0,\ n \ge 2. \qquad (39)$$

РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

Аналитические решения уравнения (38), найденные в пакете аналитических вычислений Wolfram Mathematica, имеют вид трех комплексных корней $\omega_n^{(j)}$ ($j = 1-3$), где верхний индекс в круглых скобках определяет порядковый номер корня. Сразу же выделим в них вещественную $\mathrm{Re}\,\omega_n^{(j)}$ и мнимую $\mathrm{Im}\,\omega_n^{(j)}$ составляющие:

$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(j)} = \mathrm{Im}'\,\omega_n^{(j)} + \mathrm{Im}''\,\omega_n^{(j)}$ составляющие:

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(1)} = 0,\ \mathrm{Im}\,\omega_n^{(1)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right),$$

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(2,3)} = \pm\alpha_1\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right), \qquad (40)$$

$$\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)} = \mathrm{Im}'\,\omega_n^{(3)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right),$$

$$\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)} = \mathrm{Im}''\,\omega_n^{(3)} = \alpha_2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right),$$

$$\alpha_0 \equiv \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\frac{1}{y}\left(l_1^2 - 3l_{21}\right) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}y,$$

$$\alpha_1 \equiv -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\frac{1}{y}\left(l_1^2 - 3l_{21}\right) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}y,\ \alpha_2 \equiv \sqrt[3]{2}\,\frac{l_{22}}{y},$$

$$y_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{x}}\left|2l_1^3 - 9l_1l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}\right|,$$

$$y \equiv \left|2l_1^3 - 9l_1l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}\right|^{\frac{1}{3}},$$

$$x \equiv \left|27l_1^2l_{21}^2 - 108l_{21}^3 - 108l_1^3l_{31} + 486l_1l_{21}l_{31} - 729l_{31}^2\right|.$$

Здесь положительная вещественная компонента комплексной частоты $\omega_n^{(2)}$ ($\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)} > 0$) интерпретируется как собственная частота осцилляций (отрицательная вещественная часть комплексной частоты $\omega_n^{(3)}$ ($\mathrm{Re}\,\omega_2^{(3)} < 0$) не несет физического смысла). Мнимая часть $\mathrm{Im}\,\omega_n^{(2,3)} = \mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2,3)} + \mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2,3)}$ определяет декремент затухания $\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2,3)}$ полоидального движения жидкости, связанного с вязкостью реальной жидкости, и добавку $\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2,3)}$, характеризуемую энергопотерями на излучение электромагнитных волн. В нижеследующем рассмотрении среди корней $\omega_n^{(2)}$, $\omega_n^{(3)}$ примем во внимание только физически значимое решение $\omega_n^{(2)} = \mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)} - i\,\mathrm{Im}\,\omega_n^{(2)} \equiv \mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)} - i\left(\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)} + \mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)}\right)$.

Используя волновое число $k \equiv \dfrac{\mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)}}{c}$ и формулу (40) частоты незатухающих осцилляций $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)}$, отдельно выпишем явный вид поправки к декременту затухания $\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)}$, связанного с потерями механической энергии капиллярных осцилляций на электромагнитное излучение:

$$\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)} = \sqrt[3]{2}\,\frac{l_{22}}{y}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right), \qquad (41)$$

$$l_{22} \equiv W\frac{\sigma}{\rho R^3}n^2\left(n+1\right)\left(\frac{2^n\left(n-1\right)!}{\left(2n\right)!}\right)^2 \times$$

$$\times\left(\frac{R}{c}\alpha_1\cos\left(\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\ y_0\right)\right)^{2n+1}.$$

Подчеркнем, что в выражение (41) входят не только конечные значения физических параметров: b, γ, ε_1, но и конечное значение c – скорости распространения электромагнитных волн в вакууме.

В целях нахождения численных решений дисперсионного уравнения (38) примем средние характеристики водяной капли: $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см^3, $\nu = 0.01$ см^2/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 5\cdot10^7$ единиц проводимости СГСЭ, $b = 300$ см^2/(единица напряженности СГСЭ, умноженная на c). Положим также, что деформация равновесной сферической формы вызвана возбуждением основной (второй) $n = 2$ колебательной моды, регистрируемой при натурных измерениях и обусловленной взаимодействием капли с отрывающимися от ее поверхности вихрями в результате турбулентного обтекания потоком воздуха. В соответствии со справочными данными [24] примем средний заряд облачных капель, равный $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм, где $Q_{кр}$ – критическое значение заряда). Тогда для наименьшей облачной капли $R = 3$ мкм имеем:

$$\omega_2^{(1)} = -1.59\cdot10^7 i \text{ рад/с},$$
$$\omega_2^{(2,3)} = \left(\pm4.61\cdot10^6 - 0.56\cdot10^6 i\right) \text{ рад/с}.$$

Для наибольшей облачной капли $R = 30$ мкм вычислим:

$$\omega_2^{(1)} = -7.72\cdot10^6 i \text{ рад/с},$$
$$\omega_2^{(2,3)} = \left(\pm147\cdot10^3 - 5.6\cdot10^3 i\right) \text{ рад/с}.$$

Учитывая средний заряд дождевых капель $Q = 7\cdot10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 2\cdot10^{-3}Q_{кр}$ при $R = 0.25$ мм и $\sim 3\cdot10^{-5}Q_{кр}$ при $R = 3.5$ мм), при наименьшем радиусе $R = 0.25$ мм получим:

$$\omega_2^{(1)} = -7.71\cdot10^6 i \text{ рад/с},$$
$$\omega_2^{(2,3)} = \left(\pm6.1\cdot10^3 - 80i\right) \text{ рад/с},$$

а при наибольшем радиусе $R = 3.5$ мм найдем решения:

$$\omega_2^{(1)} = -7.71\cdot10^6 i \text{ рад/с},$$
$$\omega_2^{(2,3)} = \left(\pm117 - 0.41i\right) \text{ рад/с}.$$

Из выше полученных аналитических и численных решений дисперсионного уравнения (38) можно видеть, что первый корень $\omega_n^{(1)} = -i\,\mathrm{Im}\,\omega_n^{(1)}$, линейно зависящий от величин γ, b, имеет физический смысл зарядово-релаксационного апериодического течения жидкости. Из рис. 1 можно видеть, что амплитуда $M_n(t)$ возмущения $\xi(\theta,t)$ убывает по экспоненте за характерное время максвелловской релаксации заряда $\tau_r = 0.13$ мкс: $M_n(t) = \varepsilon R\cdot\exp\left(-\mathrm{Im}\,\omega_n^{(1)}t\right)$, где $\varepsilon = 0.1$ – безразмерная амплитуда осцилляций.

Кроме того, второй и третий корни $\omega_n^{(2)}$, $\omega_n^{(3)}$, на которые не оказывают влияние электропроводность жидкости γ и подвижность носителей заряда b, характеризуют затухающие капиллярные осцилляции капли. В этом случае снижение со временем периодически изменяющейся амплитуды $M_n(t)$ малой деформации $\xi(\theta,t)$ равновесной сферы описывается экспоненциальным законом в виде:

$$M_n(t) = \varepsilon_0 R\cdot\cos\left(\mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)}t + \varphi\right)\exp\left(-\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)}t\right), \quad (42)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)}}{\mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)}}\right)^2},\ \varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)}}{\mathrm{Re}\,\omega_n^{(2)}}\right).$$

Здесь декремент затухания $\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)}$ сказывается на гашении капиллярных осцилляций капли за счет диссипации накопленной кинетической энергии полоидальной составляющей поля скоростей течения вязкой жидкости в виде тепла. Из рис. 2

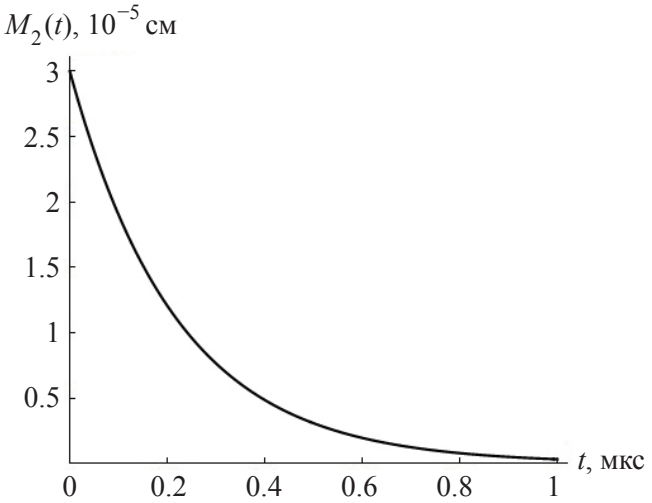


Рис. 1. Зависимость амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной сферической формы облачной капли вязкой жидкости радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$) от времени t, соответствующая зарядово-релаксационному апериодическому течению жидкости. Расчеты проведены при $n = 2$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см^3, $\nu = 0.01$ см^2/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 5\cdot10^7$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ.

видно, что декремент вязкого затухания $\mathrm{Im}'\omega_2^{(2)}$ линейно растет при увеличении коэффициента кинематической вязкости ν и увеличивается по обратной квадратичной зависимости при уменьшении радиуса капли R.

На рис. 3 приведены временные зависимости амплитуды $M_2(t)$ возмущения капли, совершающей затухающие капиллярные осцилляции, при различных значениях физических величин R (кривая *1*, кривая *3*), ν (кривая *2*, кривая *4*), согласно расчетам по (42), когда возбуждена основная $n = 2$ мода. Видно, что скорость снижения амплитуды осцилляций увеличивается при возрастании величины безразмерной кинематической вязкости, т.е. при снижении размера капли R или увеличении коэффициента кинематической вязкости ν.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

Из вышеприведенных численных решений несложно видеть, что вязкий декремент затухания $\mathrm{Im}'\omega_n^{(2)}$ на один-два порядка величины ниже частоты незатухающих осцилляций $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)}$ внутриоблачных капель и на два-три порядка величины меньше в случае дождевых капель. В связи с этим для нижеследующего изложения будем полагать, что тепловые потери кинетической энергии полоидальной компоненты поля скоростей движения маловязкой жидкости пренебрежимо малы. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии при отсутствии вязкого затухания потери кинетической энергии потенциального поля скоростей течения идеальной жидкости идут на электромагнитное излучение при ускоренном движении собственного заряда в процессе осцилляций капли. Это приводит к тому, что мощность излучения электромагнитных волн равна скорости убывания механической энергии затухающих осцилляций n-й моды ϑ_n, изменяющейся со временем по гармоническому закону $\vartheta_n \sim \exp\left(-2\,\mathrm{Im}''\omega_n^{(2)}\right)$. В результате имеем общее выражение [26]:

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} = 2\vartheta_n\,\mathrm{Im}''\omega_n^{(2)}. \qquad (43)$$

Следуя теореме вириала, выпишем запасенную энергию ϑ_n капиллярных осцилляций капли идеальной жидкости в виде удвоенной средней

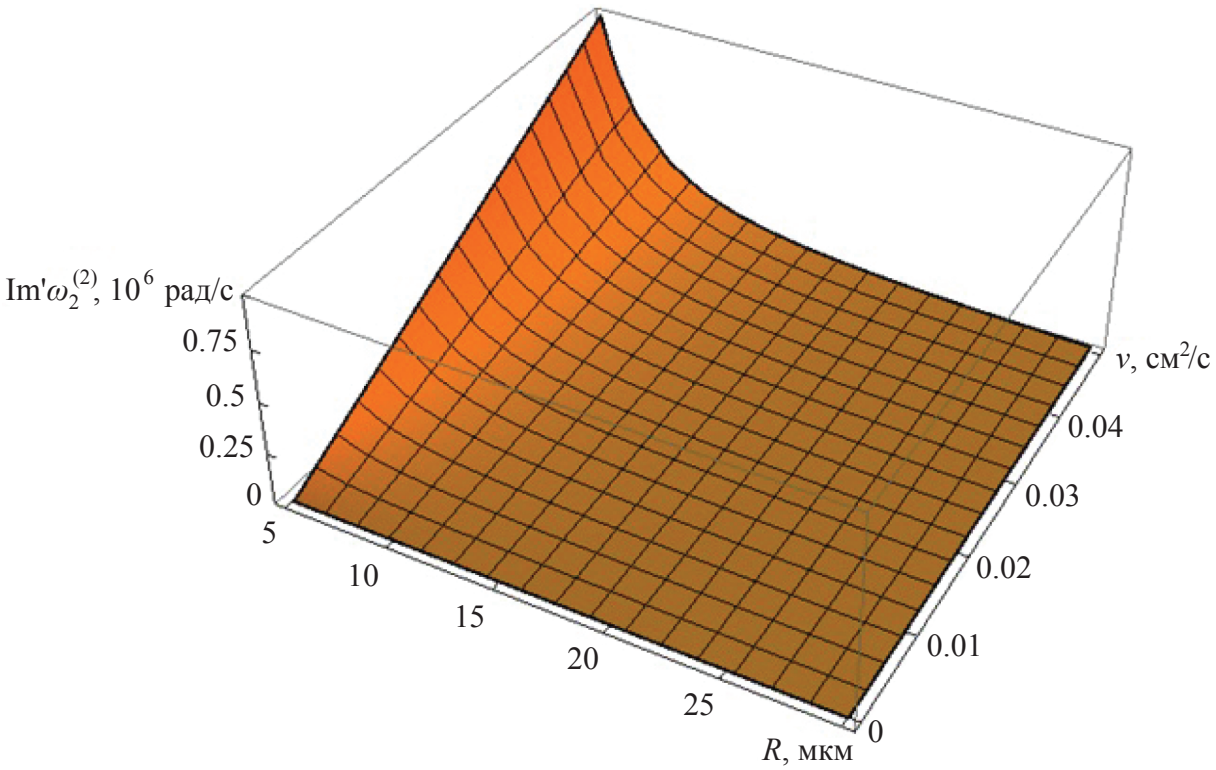


Рис. 2. Зависимость декремента вязкого затухания $\mathrm{Im}'\omega_2^{(2)}$ капиллярных осцилляций облачной капли от радиуса R и коэффициента кинематической вязкости ν, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1.

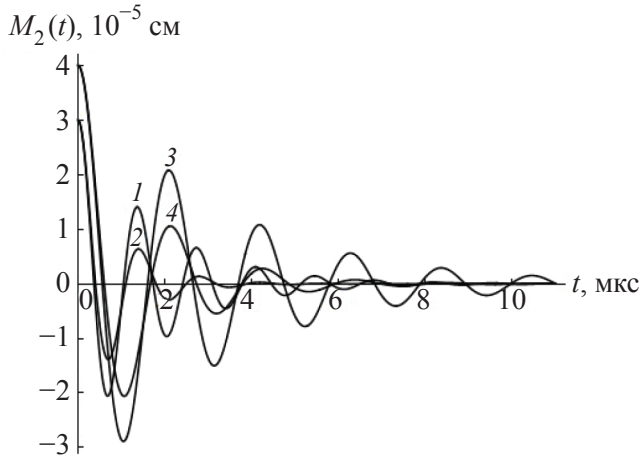


Рис. 3. Зависимость от времени t амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной сферической формы облачной капли вязкой жидкости с зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.04Q_{кр}$ при $R = 4$ мкм), совершающей затухающие капиллярные осцилляции. Расчеты проведены при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. Кривая *1* – $R = 3$ мкм, $\nu = 0.01$ см^2/с, кривая *2* – $R = 3$ мкм, $\nu = 0.02$ см^2/с, кривая *3* – $R = 4$ мкм, $\nu = 0.01$ см^2/с, кривая *4* – $R = 4$ мкм, $\nu = 0.02$ см^2/с.

за период кинетической энергии потенциального движения молекул жидкости:

$$\vartheta_n = \frac{\rho}{2}\int\limits_V |V_1|^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$
$$V = [0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi], \quad (44)$$

где потенциальная компонента поля скоростей $V_1(r,\theta,t) = \nabla\psi_1(r,\theta,t)$ равна:

$$\vec{V}_1 = -\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} i\omega_n M_n \exp(-i\omega_n t)\left(P_n(\mu)\vec{e}_r + \frac{1}{n}\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right),$$
$$M_n = \varepsilon R. \quad (45)$$

Подстановка (45) в (44) и вычисление интеграла по объему V невозмущенной сферы позволяет записать накопленную механическую энергию ϑ_n в виде:

$$\vartheta_n = \frac{2\pi\rho R^3 M_n^2 \left(\mathrm{Re}\,\omega_n\right)^2}{n(2n+1)}. \quad (46)$$

Применяя (41), (43), (46), найдем окончательное аналитическое выражение для интенсивности электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли, подверженной капиллярному волновому возмущению n-й моды, при наличии эффекта релаксации заряда:

$$I = 4\sqrt[3]{2}\pi\sigma M_n^2 \frac{(n-1)(n+2)}{(2n+1)}\left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right)\frac{l_{22}}{y}\times$$
$$\times\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, y_0\right). \quad (47)$$

Из этого выражения видно, что наиболее сильно интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли зависит от амплитуды осцилляций M_n n-й моды капли, поэтому в нижеследующем качественном изложении ограничимся построением зависимости амплитуд M_n^2 от физических параметров системы.

Используя формулу (47), оценим по порядку величины мощность радиоизлучения, связанного с линейными осцилляциями заряженных облачных капель с типичными размерами от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм, концентрация которых в кучево-дождевом облаке составляет ~10^3 см$^{-3}$ [24].

Отметим, что осцилляции большой амплитуды облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией, дроблением на более мелкие в результате процессов столкновения или в результате реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Данные натурных наблюдений [27] показывают, что амплитуды возмущений капель могут достигать десятков процентов от их радиусов. Для нижеследующих оценок безразмерную амплитуду осцилляций положим равную $\varepsilon = 0.1$. Кроме того, будем считать, что осцилляции капли связаны с возбуждением основной колебательной моды $n = 2$.

Принимая для оценки, для капли радиуса $R = 3$ мкм, несущей заряд $Q = 5\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16Q_{кр}$), найдем интенсивность излучения $I \sim 5\cdot10^{-40}$ эрг/с на частоте $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)} = 4.56\cdot10^6$ рад/с при декременте затухания на электромагнитное излучение $\mathrm{Im}''\omega_2^{(2)} = 8\cdot10^{-34}$ рад/с. В случае капли с характерным линейным размером $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 1.1\cdot10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.11Q_{кр}$) получим мощность излучения, равную $I \sim 2\cdot10^{-43}$ эрг/с, при $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)} = 146\cdot10^3$ рад/с, $\mathrm{Im}''\omega_2^{(2)} = 3\cdot10^{-39}$ рад/с.

На рис. 4 изображена зависимость $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}\left(\gamma, b\right)$, рассчитанная по выражению (40). Отметим, график функции $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}\left(\gamma, b\right)$ качественно повторяет зависимость интенсивности $I\left(\gamma, b\right)$. Интересно, что поправка $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}$ к декременту вязкого затухания, определяемая энергопотерями на электромагнитное излучение, а также интенсивность излучения I снижаются при возрастании электропроводности жидкости γ и подвижности носителей зарядов b. Причем более быстрое снижение характеристик излучения $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}$, I прослеживается при увеличении параметра b.

Из рис. 5 можно установить, что на увеличение мощности излучения I сказывается повышение величины диэлектрической проницаемости ε_1 жидкости. Кроме того, выясняется, что интенсивность излучения I при возрастании радиуса R убывает по приблизительно обратной квадратичной зависимости.

На рис. 6а проиллюстрирована зависимость интенсивности радиоизлучения $I\left(W\right)$ для облачной капли конечной проводимости, а также в двух предельных случаях: для капли идеально проводящей жидкости ($\varepsilon_1 \to \infty$) (рис. 6б) и капли идеально диэлектрической жидкости ($\varepsilon_1 \to 0$) (рис. 6в). Следует заметить, что графики мощности излучения $I\left(W\right)$ качественно схожи с графиками зависимости малой поправки $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}\left(W\right)$ к декременту затухания, связанного с излучением электромагнитных волн.

Можно видеть, что в области малых значений зарядового параметра Релея W мощность излучения весьма быстро возрастает, а достигнув максимального значения, убывает до нуля при значениях параметра W, близких к критическим.

Из сравнения рис. 6а–6в можно сделать заключение, что учет конечности скорости переноса электрического заряда при капиллярных осцилляциях капли приводит к изменению интенсивности радиоизлучения и декремента затухания на электромагнитное излучение: на порядок ниже по сравнению с идеальным проводником и на два порядка выше по сравнению с идеальным диэлектриком.

Что касается влияния эффекта релаксации заряда на интенсивность электромагнитного излучения, то можно отметить, что наибольшая интенсивность излучения характерна для осциллирующей

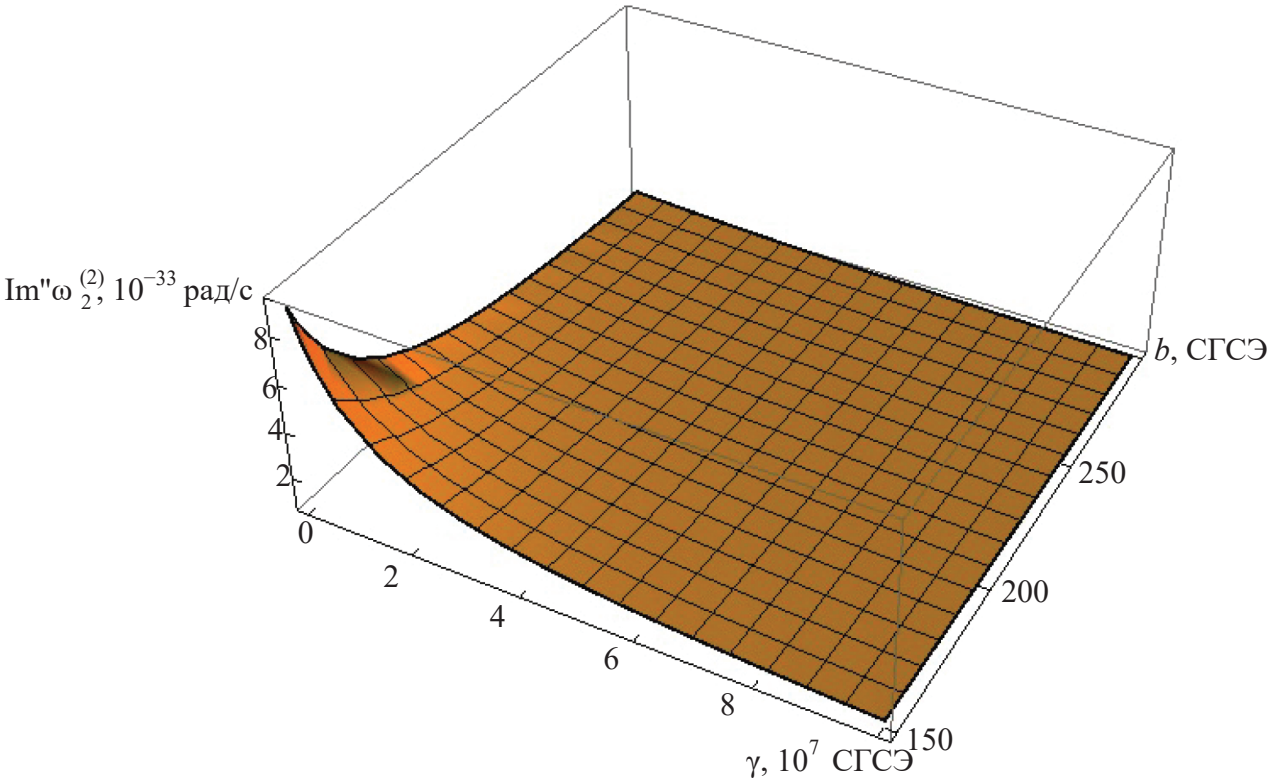


Рис. 4. Зависимость поправки $\mathrm{Im}''\,\omega_2^{(2)}$ к декременту затухания, связанного с электромагнитным излучением осциллирующей облачной капли радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 5\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16Q_{\text{кр}}$), от удельной проводимости γ и подвижности носителей электрических зарядов b. Расчеты проведены при тех же значениях физических величин, что на рис. 1.

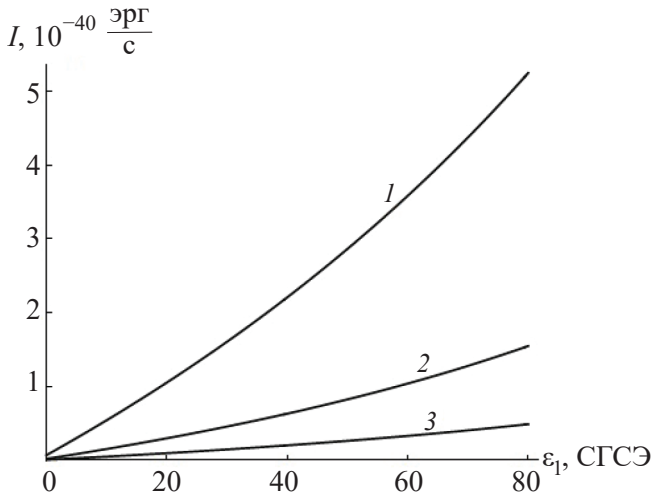


Рис. 5. Зависимость интенсивности I электромагнитного излучения осциллирующей облачной капли с зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ от диэлектрической проницаемости ε_1, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. Кривая *1* – $R = 3$ мкм, кривая *2* – $R = 4$ мкм, кривая *3* – $R = 5$ мкм.

капли идеально проводящей жидкости (рис. 6б), которая на порядок выше по сравнению с интенсивностью излучения капли конечной проводимости при $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 5 \cdot 10^7$ единиц проводимости СГСЭ, $b = 300$ см^2/(единица напряженности СГСЭ, умноженная на c) (рис. 6а). Наименьшая интенсивность излучения прослеживается для капли чисто диэлектрической жидкости (рис. 6в), которая на два порядка величины ниже по сравнению с интенсивностью излучения капли конечной проводимости (рис. 6а).

УЧЕТ ЭФФЕКТОВ РЕЛАКСАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ И ВЯЗКОСТИ

Остановимся подробнее на включении эффектов релаксации поверхностного натяжения и релаксации вязкости. Для нижеследующего рассмотрения примем, что потери кинетической энергии потенциальной составляющей поля скоростей течения жидкости, идущие на электромагнитное излучение при ускоренном движении заряда осциллирующей капли, пренебрежимо малы по сравнению с диссипацией кинетической энергии полоидальной компоненты поля скоростей движения вязкой жидкости.

В самом деле, для наименьшей облачной капли радиуса $R = 3$ мкм, несущей собственный заряд $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16 Q_{\text{кр}}$), при частоте осцилляций $\mathrm{Re}\,\omega_2 = 4.56 \cdot 10^6$ рад/с на основной (второй) моде $n = 2$ декремент затухания $\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)} = 8 \cdot 10^{-34}$ рад/с, связанный с излучением электромагнитных волн, на 39 порядков величины ниже декремента вязкого затухания, равного $\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)} = 0.56 \cdot 10^6$ рад/с. Крупная внутриоблачная капля размером $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 1.1 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.11 Q_{\text{кр}}$), осциллирующая на частоте $\mathrm{Re}\,\omega_2^{(2)} = 146 \cdot 10^3$ рад/с, обладает декрементом затухания на электромагнитное излучение $\mathrm{Im}''\,\omega_n^{(2)} = 3 \cdot 10^{-39}$ рад/с, который на 41 порядок величины меньше декремента вязкого затухания $\mathrm{Im}'\,\omega_n^{(2)} = 5.6 \cdot 10^3$ рад/с.

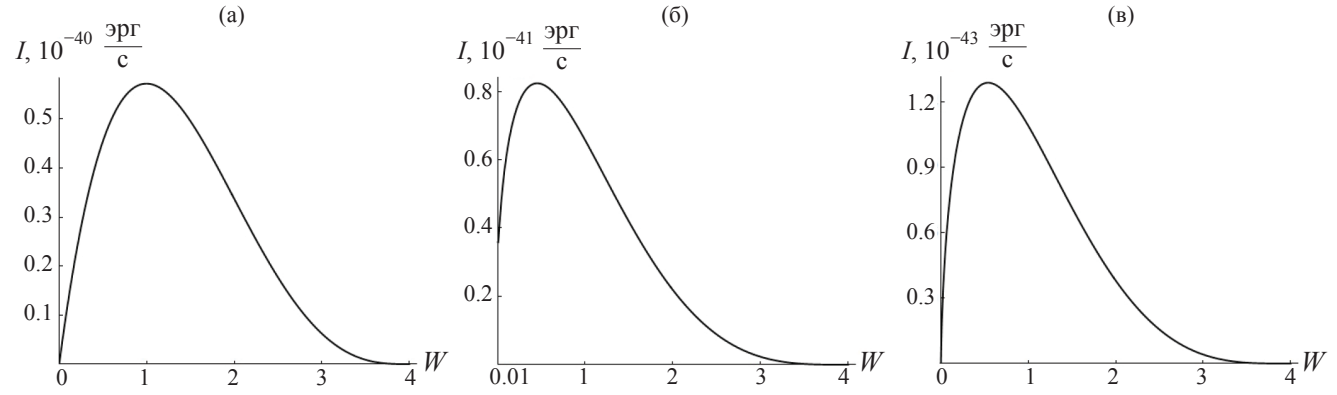


Рис. 6. (а) Зависимость интенсивности I электромагнитного излучения осциллирующей заряженной облачной капли $R = 30$ мкм конечной проводимости при $\varepsilon_1 = 80$ от параметра Релея W, построенная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. (б) То же, что на рис. 3а, но для капли идеально проводящей жидкости при $\varepsilon_1 = \infty$. (в) То же, что на рис. 3а, но для капли идеально диэлектрической жидкости при $\varepsilon_1 = 0$.

Таким образом, в (38) при $c \to \infty$ слагаемые l_{22}, l_{32} обращаются в ноль, а само уравнение (38) приводится к кубическому дисперсионному уравнению для капиллярных осцилляций заряженной капли маловязкой жидкости с конечной электропроводностью:

$$\omega_n^3 + il_1\omega_n^2 - \omega_n l_{21} - il_{31} = 0,\ n \geq 2. \qquad (48)$$

Если же в уравнение (48) подставить динамические коэффициенты кинематической вязкости и поверхностного натяжения, выражаемые формулами (1), (4), то несложно прийти к алгебраическому уравнению пятой степени. Однако, согласно теореме Абеля [28], такое уравнение не имеет аналитических решений. Ввиду этого на данном этапе с целью понижения порядка дисперсионного уравнения положим, что электрический заряд в процессе капиллярных осцилляций капли перераспределяется мгновенно (т.е. отсутствует эффект релаксации заряда). Таким образом, учет лишь эффектов релаксации поверхностного натяжения и релаксации вязкости позволяет получить дисперсионное уравнение четвертого порядка:

$$\omega_n^4 + ik_1\omega_n^3 + k_2\omega_n^2 + k_3\omega_n + ik_4 = 0,\ n \geq 2, \quad (49)$$

$$k_1 \equiv \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2};$$

$$k_2 \equiv -\frac{1}{\tau_1\tau_2} - 2\frac{\nu_0}{R^2\tau_1}\left(n-1\right)\left(2n+1\right) - \omega_{n0}^2\left(1+\frac{\sigma_*}{\sigma_0}\right),$$

$$k_3 \equiv -\left(\frac{\sigma_*}{\sigma_0}+1\right)\frac{\omega_{n0}^2}{\tau_1} - \left(2\frac{\nu_0}{R^2\tau_1}\left(n-1\right)\left(2n+1\right) + \omega_{n0}^2\right)\frac{1}{\tau_2},$$

$$k_4 \equiv \frac{\omega_{n0}^2}{\tau_1\tau_2},$$

$$\omega_{n0}^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\rho R^3} n\left(n-1\right)\left(n+2\right)\left(1-\frac{W}{\left(n+2\right)}\right).$$

Примечательно, что включение релаксационных эффектов (релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения) приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения, найденного без учета релаксационных явлений [6]. Это обуславливается появлением релаксационных апериодических течений жидкости: упругого и связанного с перестройкой приповерхностного двойного электрического слоя полярной жидкости.

В предельном переходе к идеальной жидкости, когда $\nu_0 = 0$, в пренебрежении эффекта релаксации вязкости при $\tau_1 \to \infty$ из (49) перейдем к кубическому дисперсионному уравнению при наличии эффекта динамического поверхностного натяжения невязкой полярной жидкости. Однако в пределе $\tau_2 \to \infty$ и $\sigma_* = 0$, когда отсутствует эффект релаксации поверхностного натяжения, придем к выражению, совпадающему с дисперсионным уравнением третьей степени с учетом вязко-упругих свойств жидкости.

При помощи системы аналитических вычислений Wolfram Mathematica рассчитаны комплексные решения $\omega_n^{(i)}$ ($i = 1-4$) дисперсионного уравнения (49). Их реальные $\mathrm{Re}\,\omega_n^{(i)}$ и мнимые $\mathrm{Im}\,\omega_n^{(i)}$ компоненты для разных диапазонов радиусов представляются в виде:

для $\mathrm{R} \leq 46$ мкм:

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(1,2)} = \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{+2} + y_2^{+2}\right)^{\frac{1}{4}} \times$$
$$\times\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^+}{y_1^+}\right|\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(1,2)} = -\frac{1}{4}k_1 \mp \frac{1}{2}\left(y_1^{+2} + y_2^{+2}\right)^{\frac{1}{4}} \times$$
$$\times\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^+}{y_1^+}\right|\right) - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{4}} \times$$
$$\times\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

для $\mathrm{R} > 46$ мкм:

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(1,2)} = \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{+2} + y_2^{+2}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\left(-\pi + \mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^+}{y_1^+}\right|\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(1,2)} = -\frac{1}{4}k_1 \mp \frac{1}{2}\left(y_1^{+2} + y_2^{+2}\right)^{\frac{1}{4}} \times$$
$$\times\sin\left(\frac{1}{2}\left(-\pi + \mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^+}{y_1^+}\right|\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

для $\mathrm{R} \leq 42$ мкм:

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(3,4)} = \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{-2}+y_2^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^-}{y_1^-}\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(3,4)} = -\frac{1}{4}k_1 \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{-2}+y_2^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^-}{y_1^-}\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

для $\mathrm{R} > 42$ мкм:

$$\mathrm{Re}\,\omega_n^{(3,4)} = \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{-2}+y_2^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\pi-\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^-}{y_1^-}\right|\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_n^{(3,4)} = -\frac{1}{4}k_1 \mp\frac{1}{2}\left(y_1^{-2}+y_2^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi-\mathrm{arctg}\left|\frac{y_2^-}{y_1^-}\right|\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$x_1 \equiv -\frac{k_1^2}{4}-\frac{2}{3}k_2+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\beta_0}{\sqrt[3]{|\alpha_0|}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{16}}\sqrt[3]{|\alpha_0|},$$

$$x_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16}}\sqrt[3]{|\alpha_0|}-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}\frac{\beta_0}{\sqrt[3]{|\alpha_0|}},$$

$$y_1^{\pm} \equiv -\frac{k_1^2}{2}-\frac{4}{3}k_2-\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\frac{\beta_0}{\sqrt[3]{|\alpha_0|}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{16}}\sqrt[3]{|\alpha_0|}\mp$$

$$\mp\frac{1}{4}\beta_2\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{4}}\sin\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$y_2^{\pm} \equiv -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16}}\sqrt[3]{|\alpha_0|}+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}\frac{\beta_0}{\sqrt[3]{|\alpha_0|}}\mp$$

$$\mp\frac{1}{4}\beta_2\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right),$$

$$\alpha_0 \equiv \beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0^3},$$

$$\beta_0 \equiv k_2^2+3k_1k_3+12k_4,$$

$$\beta_1 \equiv 2k_2^3+9k_1k_2k_3-27k_3^2-27k_1^2k_4-72k_2k_4,$$

$$\beta_2 \equiv k_1^3+4k_1k_2-8k_3.$$

Здесь верхний индекс в круглых скобках означает порядковый номер корня уравнения (49).

Используя вышеприведенные средние характеристики облачных и дождевых капель: $\rho = 1$ г/см^3, $\nu_0 = 0.01$ см^2/с, $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty = 91$ дин/см, $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 = 18$ дин/см, $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, осциллирующих на основной (второй) моде $n = 2$, несложно получить численные решения дисперсионного уравнения (49). Так, для мелкой облачной капли радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{\text{кр}}$) найдем:

$$\omega_2^{(2)} = -0.8\cdot10^5 i \text{ рад/с}, \quad \omega_2^{(3)} = -1\cdot10^5 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(4,1)} = \left(\pm5.19\cdot10^6 - 10.05\cdot10^3 i\right) \text{ рад/с}.$$

В случае внутриоблачной капли с характерным линейным размером $R = 30$ мкм, обладающей зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.002Q_{\text{кр}}$), имеем:

$$\omega_2^{(2)} = -0.81\cdot10^5 i \text{ рад/с}, \quad \omega_2^{(3)} = -1\cdot10^5 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(4,1)} = \left(\pm0.16\cdot10^6 - 9.28\cdot10^3 i\right) \text{ рад/с}.$$

Для наименьшей дождевой капли $R = 0.25$ мм, несущей заряд $Q = 7\cdot10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 2\cdot10^{-3}Q_{\text{кр}}$), справедливо решение:

$$\omega_2^{(2)} = -0.99\cdot10^5 i \text{ рад/с}, \quad \omega_2^{(3)} = -1\cdot10^5 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(4,1)} = \left(\pm6.12\cdot10^3 - 0.13\cdot10^3 i\right) \text{ рад/с}.$$

При радиусе $R = 3.5$ мм крупной дождевой капли с зарядом $Q = 7\cdot10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 3\cdot10^{-5}Q_{\text{кр}}$) рассчитаем:

$$\omega_2^{(2)} = -0.99\cdot10^5 i \text{ рад/с}, \quad \omega_2^{(3)} = -1\cdot10^5 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(4,1)} = \left(\pm116.71 - 0.42i\right) \text{ рад/с}.$$

Остановимся подробнее на анализе полученных решений дисперсионного уравнения (49) для случая капель малых размеров, удовлетворяющих условиям: $\omega_n\tau_1 >> 1$, $\omega_n\tau_2 >> 1$, $\frac{\sigma_0}{\rho R} >> \frac{\nu_0}{\tau_1}$, и для капель больших размеров при выполнении неравенств: $\omega_n\tau_1 << 1$, $\omega_n\tau_2 << 1$, $\frac{\nu_0}{R^2}\tau_1 << 1$.

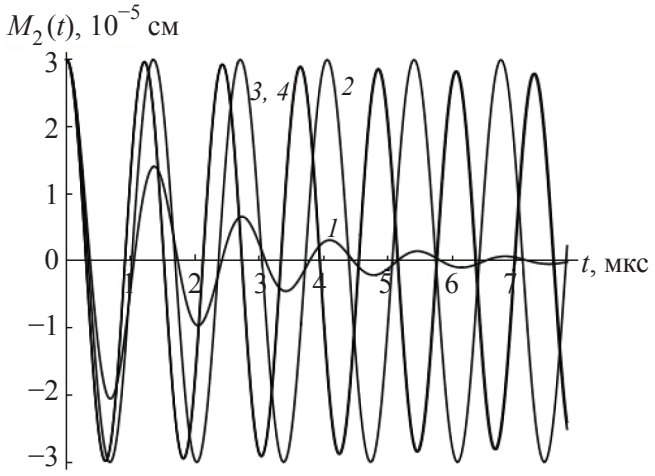


Рис. 7. Зависимость амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной сферической формы облачной капли вязкой жидкости радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06 Q_{кр}$) от времени t, рассчитанная при $n = 2$, $\rho = 1$ г/см^3. Кривая *1* получена с учетом эффекта релаксации заряда при $\nu = 0.01$ см^2/с, $\sigma = 73$ дин/см, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 5 \cdot 10^7$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ и соответствует затухающим капиллярным осцилляциям капли; кривая *2* – с учетом эффекта релаксации вязкости при $\nu_0 = 0.01$ см^2/с, $\sigma = 73$ дин/см, $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2 = \infty$ и соответствует вязкоупругим затухающим осцилляциям; кривая *3* – с учетом эффекта релаксации поверхностного натяжения при $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty = 91$ дин/см, $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 = 18$ дин/см, $\tau_1 = \infty$, $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ с и соответствует релаксационным затухающим осцилляциям из-за перестройки двойного электрического слоя; кривая *4* – с учетом эффекта релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения при $\nu_0 = 0.01$ см^2/с, $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty = 91$ дин/см, $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 = 18$ дин/см, $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ с.

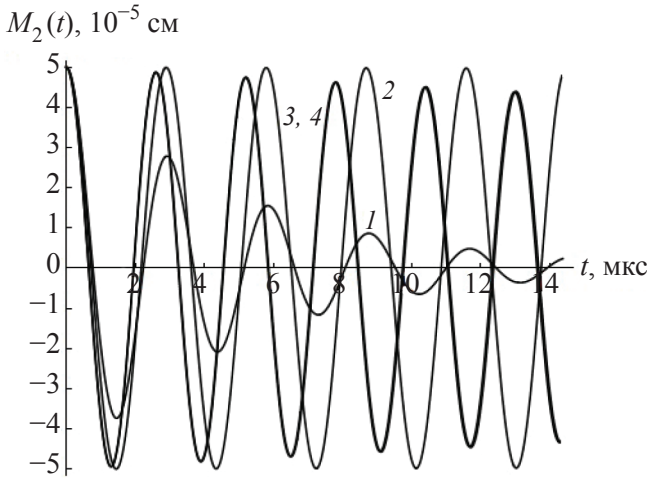


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но для капли радиуса $R = 5$ мкм и зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03 Q_{кр}$).

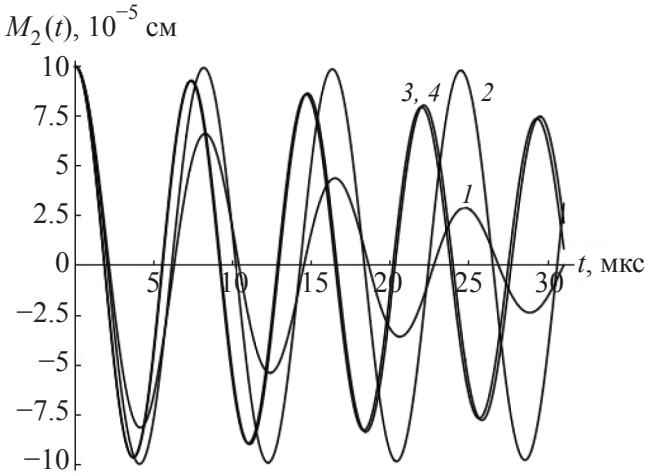


Рис. 9. То же, что на рис. 7, но для капли радиуса $R = 10$ мкм и зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01 Q_{кр}$).

На рис. 7–9 приведены графики зависимости от времени амплитуды возмущения $M_2(t)$ равновесной сферической формы облачной капли при различных радиусах R, рассчитанные по (42), для четвертого корня уравнения $\omega_2^{(4)}$ ($\omega_2^{(4)} > 0$). Видно, что кривая *4*, построенная при одновременном учете эффектов релаксации вязкости и динамического поверхностного натяжения, совпадет (в пределах толщины линии) с кривой *3*, характеризующей релаксационные затухающие осцилляции в результате перестройки двойного электрического слоя. Это говорит о том, что затухание осцилляций капель обязано сильному влиянию эффекта релаксации поверхностного натяжения и весьма мало зависит от размера капель. При этом наличие явления динамического поверхностного натяжения наиболее ярко проявляется в увеличении собственной частоты осцилляций для малых радиусов. Однако учет вязко-упругих свойств жидкости приводит к меньшему увеличению частоты незатухающих осцилляций. Безусловно, в затухании капиллярных осцилляций играет роль вязкость жидкости так, что осцилляции мелких облачных капель быстрее гасятся вязкостью (кривые *1*).

Следует отметить, что капиллярные осцилляции капли вязкой жидкости (кривые *1*) имеют чисто вязкий характер, а их затухание обуславливается диссипацией запасенной энергии капиллярных осцилляций в виде тепла. Несложно видеть, что включение эффекта релаксации вязкости снижает гасящее влияние на спектр капиллярных осцилляций (кривые *2*). Это объясняется тем, что течение жидкости принимает преимущественно упругий характер, слегка осложненный вязким движением. Примечательно, что поведение малых облачных капель (рис. 7, кривая *2*) носит твердотельный характер. В этом случае внешние кратковременные

силовые воздействия вызывают упругие деформации вязкой жидкости в результате обратимых смещений молекул жидкости от положений равновесия. После прекращения силовых воздействий сдвиговые напряжения релаксируют к нулевому уровню по экспоненциальному закону. При этом вязкость не вносит вклад в затухание.

Несколько иная картина складывается для дождевых капель. Согласно рис. 10, рис. 11 учет релаксационных явлений приводит к слабому затуханию и не оказывает влияние на частоту осцилляций. При этом на снижении затухания осцилляций сказывается возрастание радиусов капель. Выясняется, что среди рассматриваемых релаксационных эффектов наименьший вклад в затухание осцилляций дождевых капель (в отличие от облачных капель) дает эффект динамического поверхностного натяжения (кривые *3*). Расчеты показывают, что декремент вязко-упругого затухания совпадает с декрементом вязкого затухания, как это видно на кривых *1*, *2*. По мере увеличения размера капель кривая *4*, построенная при наличии явлений релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения, сближается с кривыми *1*, *2*, отвечающими за затухающие капиллярные волны.

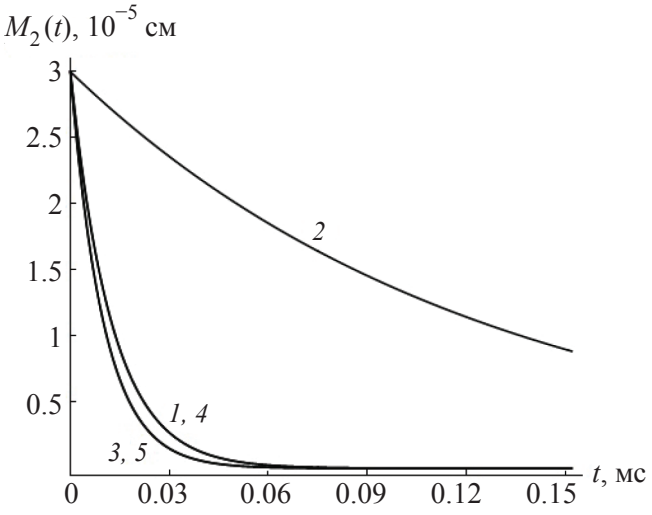


Рис. 10. Зависимость амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной сферической формы облачной капли вязкой жидкости радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$) от времени t, построенная с учетом релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения и соответствующая релаксационным апериодическим движениям жидкости из-за перестройки двойного электрического слоя. Расчеты проведены при $n = 2$, $\rho = 1$ г/см^3, $\nu_0 = 0.01$ см^2/с, $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty = 91$ дин/см, $\sigma_* = \sigma - \sigma_0 = 18$ дин/см. Кривая *1* – $\tau_1 = \infty$, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *2* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = \infty$, кривая *3* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *4* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-4}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *5* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-4}$ с.

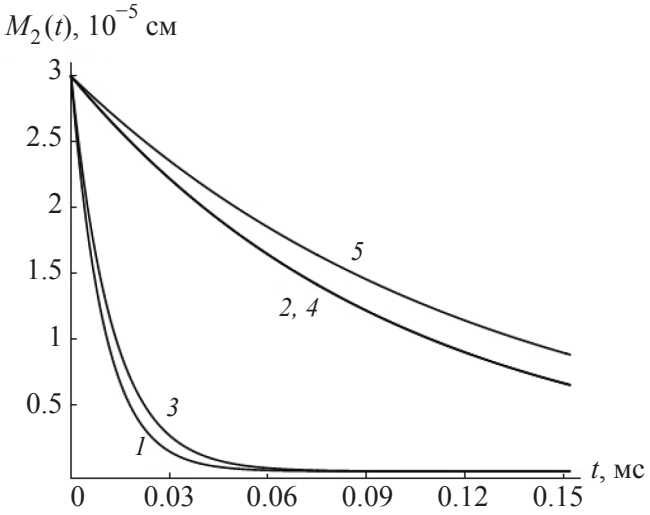


Рис. 11. То же, что на рис. 10, но для релаксационных упругих движений вязкой жидкости.

Интересно отметить, что вязкость жидкости не оказывает влияние на релаксационные затухающие осцилляции капли, обусловленные динамическим поверхностным натяжением.

На рис. 12, 13 иллюстрируются временные зависимости амплитуды искажения $M_2\left(t\right) = \varepsilon R\cdot\exp\left(-\operatorname{Im}\omega_n^{(2,3)}t\right)$ равновесной облачной капли $R = 3$ мкм, построенные с учетом релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения (кривые *3*, *4*, *5*) и соответствующие апериодическим течениям жидкости. На рис. 12 (кривая *1*) показано, что вязкость жидкости не влияет на релаксационное апериодическое движение, определяемое перестройкой двойного электрического слоя, а его декремент затухания обратно пропорционален характерному времени релаксации поверхностного натяжения τ_2.

На рис. 13 кривая *2* иллюстрирует апериодическое упругое течение вязкой жидкости, для которого декремент затухания изменяется по обратному линейному закону от характерного времени релаксации вязкости τ_1 и незначительно снижается при увеличении вязкости ν_0.

Из рис. 12 несложно видеть, что кривая *3*, построенная при конечных значениях характерных времен релаксации τ_1, τ_2, весьма мало зависит от τ_1, τ_2 (кривые *4*, *5*). Напротив, кривая *3*, приведенная на рис. 13 при конечных τ_1, τ_2, показывает, что затухание апериодического течения жидкости изменяется от τ_1, τ_2 по примерно обратной зависимости (кривые *4*, *5*). Кроме того, из рис. 12 можно видеть, что кривая *3* изображена ближе к кривой *1*, нежели к кривой *2*. Указанное обстоятельство позволяет сделать заключение, что кривая *3*, построенная для третьего корня уравнения

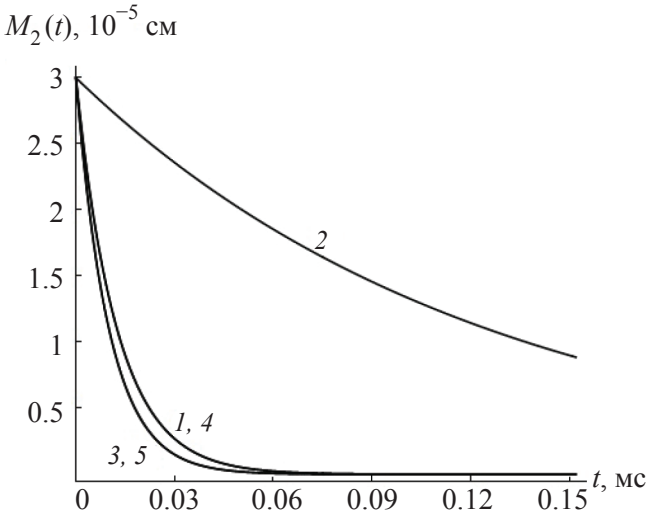


Рис. 12. Зависимость амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной сферической формы облачной капли вязкой жидкости радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2\cdot10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$) от времени t, построенная с учетом релаксации вязкости и релаксации поверхностного натяжения и соответствующая релаксационным апериодическим движениям жидкости из-за перестройки двойного электрического слоя. Расчеты проведены при $n = 2$, $\rho = 1$ г/см^3, $v_0 = 0.01$ см^2/с, $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty = 91$ дин/см, $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 = 18$ дин/см. Кривая *1* – $\tau_1 = \infty$, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *2* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = \infty$, кривая *3* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *4* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-4}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-5}$ с, кривая *5* – $\tau_1 = 1\cdot10^{-5}$ с, $\tau_2 = 1\cdot10^{-4}$ с.

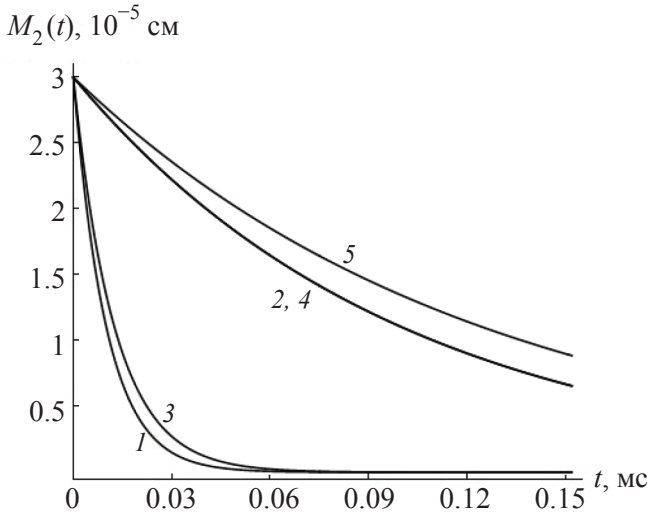


Рис. 13. То же, что на рис. 12, но для релаксационных упругих движений вязкой жидкости.

$\omega_2^{(3)}$, характеризует релаксационное апериодическое течение жидкости, вызванное перестройкой приповерхностных диполей. Тем не менее на рис. 13 показано, что в зависимости от значений параметров τ_1, τ_2 кривая *3*, приведенная для второго корня уравнения $\omega_2^{(2)}$, приближается либо к кривой *1*, либо к кривой *2*. Другими словами, апериодическое течение жидкости может носить как упругий характер при малых τ_1, τ_2, так и связанный с перестройкой двойного электрического слоя при больших значениях τ_1, τ_2.

Согласно сказанному выше, уменьшение размера капли жидкости приводит к быстрому гашению капиллярных осцилляций в результате диссипации накопленной механической энергии за счет вязкости. Определяющую роль на затухание осцилляций облачных капель оказывает эффект релаксации поверхностного натяжения, реализующийся также в модели идеальной жидкости. В случае мелких облачных капель их поведение схоже с твердым телом: течение вязкой жидкости имеет апериодический упругий характер при отсутствии влияния вязкости. Осцилляции дождевых капель схожи с осцилляциями капель идеальной жидкости. С уменьшением размера дождевых капель появляется слабое затухание осцилляций, имеющее вязко-упругий характер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В аналитических асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε найдено, что наличие эффекта релаксации заряда приводит к возникновению зарядово-релаксационного апериодического течения и затухающих капиллярных осцилляций вязкой жидкости. Обнаружено, что учет конечности скорости переноса электрического заряда приводит к изменению величины декремента затухания на электромагнитное излучение и интенсивности радиоизлучения: на порядок ниже по сравнению с идеальным проводником и на два порядка выше по сравнению с идеальным диэлектриком.

Показано, эффект релаксации поверхностного натяжения полярной жидкости может быть реализован в модели идеальной жидкости. Учет явления динамического поверхностного натяжения приводит к появлению релаксационного апериодического течения жидкости и затухающих капиллярных осцилляций релаксационной природы, обусловленных перестройкой двойного электрического слоя. В затухании осцилляций облачных капель определяющую роль играет эффект релаксации поверхностного натяжения.

Установлено, что наличие эффекта релаксации вязкости приводит к появлению релаксационного апериодического упругого течения жидкости и затухающих вязко-упругих осцилляций капель. Слабое затухание осцилляций мелких дождевых капель имеет вязко-упругий характер. Выявлено, что в случае мелких облачных капель течение вязкой жидкости носит преимущественно упругий характер.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

В данной работе отсутствуют исследования человека или животных.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, у них нет конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания, № госрегистрации 124012500442-3.

Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аджиев А.Х., Керефова З.М., Кузьмин В.А.* Грозовое электричество и молниевые разряды на Северном Кавказе // Вестник Владикавказского научного центра. 2024. Т. 24. № 3. С. 68–72. https://doi.org/10.46698/VNC.2024.46.26.001
2. *Белов П.А., Жакин А.И., Кузько Е.А.* ЭГД неустойчивость свободной поверхности // Известия Юго-Западного государственного университета. 2012. Т. 42. № 3. Ч. 1. С. 31–37.
3. *Агеева Е.В., Агеева А.Е.* Влияние свойств рабочей жидкости на размерные характеристики порошков, полученных в условиях электроэрозионной металлургии отходов безвольфрамового твердого сплава ТН20 // Металлург. 2024. № 5. С. 109–114.
4. *Гасанов И.С., Салаев Э.Ю., Гурбанов И.И.* Капиллярная неустойчивость и эмиссия нанокапель в острийном источнике ионов // Прикладная физика. 2005. № 5. С. 46–49.
5. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* О влиянии физико-химических характеристик жидкостей на закономерности их электродиспергирования // Коллоидный журнал. 2021. Т. 83. № 5. С. 532–539. https://doi.org/10.31857/S0023291221050050
6. *Левачева Г.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* О спектре колебаний форм мицеллярной частицы // МЖГ. 1985. № 2. С. 17–22.
7. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* О некоторых особенностях преобразования энергии капиллярных волн на поверхности жидкости при наличии динамического поверхностного натяжения // Коллоидный журнал. 2023. Т. 85. № 3. С. 263–276. https://doi.org/10.31857/S0023291223600128
8. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* О влиянии эффекта релаксации вязкости жидкости на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли // Коллоидный журнал. 2023. Т. 85. №. 4. С. 483–501. https://doi.org/10.31857/S0023291223600438
9. *Белов П.А., Жакин А.И.* Экспериментальные исследования электростатического диспергирования жидкостей с быстрой релаксацией заряда при различных вязкостях и коэффициентах поверхностного натяжения // Известия Юго-Западного государственного университета. 2012. № 5 (44). Ч. 2. С. 215–221.
10. *Кочурова Н.Н., Русанов А.И.* Релаксация поверхностных свойств водных растворов поверхностно-активных веществ и механизм адсорбции // Успехи химии. 1993. Т. 62. № 12. С. 1150-1163. https://doi.org/10.1070/RC1993v-062n12ABEH000065
11. *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г.* Спектр поверхностных колебаний жидкости с учетом релаксационных эффектов // ЖТФ. 1976. Т. 46. № 10. С. 2211–2213.
12. *Бадмаев Б.Б., Базарон У.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В.* Сдвиговые механические свойства полимерных жидкостей и их растворов // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 307–311.
13. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука. 1975. 592 с.
14. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* О капиллярном движении вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 8. С. 39–44.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука. 1987. 248 с.
16. *Френкель Я.И.* Теория явлений атмосферного электричества. Л.-М.: ГОСТЕХТЕОРИЗДАТ. 1949. 158 с.
17. *Hauner I.M., Deblais A., Beattie J.K, Kellay H., Bonn D.* The dynamic surface tension of water // J. Phys. Chem. Lett. 2017. V. 8. № 7. P. 1599–1603. https://doi.org/10.1021/acs.jpclett.7b00267
18. *Owens D.K.* The dynamic surface tension of sodium dodecyl sulfate solutions // J. Colloid Interface Sci. 1969. V. 29. № 3. P. 496–501.
19. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338 с.
20. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 11. С. 22–27.
21. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.
22. *Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач. М.:* Русайнс. 2020. 140 с.

23. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 830 с.
24. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат. 1989. 647 с.
25. *Кашлева Л.В., Михайловский Ю.П., Михайловский В.Ю.* Механизмы электризации облачных гидрометеоров в грозовых облаках // Ученые записки РГГМУ. 2016. № 45. С. 119–131.
26. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
27. *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // Известия АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
28. *Алексеев В.Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: МЦНМО. 2001. 192 с.
29. *Григорьев А.И.* О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 10. С. 1–7.

RELAXATION PHENOMENA AND ELECTROMAGNETIC EMISSION OF OSCILLATING CLOUD DROPLETS

A. I. Grigor'ev, N. Yu. Kolbneva, S. O. Shiryaeva

A theoretical study of the effect of relaxation processes in water on the intensity of electromagnetic radiation of an oscillating charged drop of water, which is accepted as viscous and incompressible, was carried out. A theoretical analytical expression of the dispersion equation of an oscillating and radiating drop having the form of a complex algebraic expression of the fifth degree is derived. The charge relaxation effect in an oscillating charged water droplet affects the intensity of electromagnetic radiation by it through the conductivity of the water. The greatest intensity of electromagnetic radiation is characteristic of a drop of an ideally conductive liquid. It is an order of magnitude higher than the radiation intensity of a drop of liquid with finite conductivity. The lowest radiation intensity will be for a drop of dielectric liquid with a frozen charge. The surface tension relaxation effect affects the electromagnetic emission of the charged oscillating droplet by disrupting the order of the surface water molecules and changing the magnitude of the surface tension coefficient. The water viscosity relaxation effect does not have a noticeable effect on the decaying capillary oscillations and electromagnetic radiation of cloud droplets.

Keywords: oscillating charged drop, relaxation, electromagnetic radiation, attenuation decrement