КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 87, № 4, с. 370–387

УДК 539.32

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАГНИТНЫХ ЭЛАСТОМЕРОВ

© 2025 г. А. Ю. Мусихин*, А. Ю. Зубарев

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,

пр-т Ленина, 51, Екатеринбург, 620002 Россия

**e-mail: Antoniusmagna@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.04.2025 г.
После доработки 26.06.2025 г.
Принята к публикации 26.06.2025 г.

В статье предложена теоретическая модель магнитореологических свойств магнитных эластомеров, состоящих из намагничивающихся, без собственного магнитного момента, микронных частиц в мягкой полимерной среде. Рассмотрены два типа композитов: изначально изотропные (синтезированные в отсутствии магнитного поля) и анизотропные (полимеризованные в магнитном поле, провоцирующем объединение частиц в анизотропные структуры). Результаты показывают, что образование на стадии синтеза анизотропных структур приводит к значительному увеличению макроскопической сдвиговой жесткости композита. Теоретические результаты количественно соответствуют результатам экспериментов.

Ключевые слова: магнитоактивные эластомеры, модуль сдвига, магнитореологический эффект

DOI: , **EDN:**

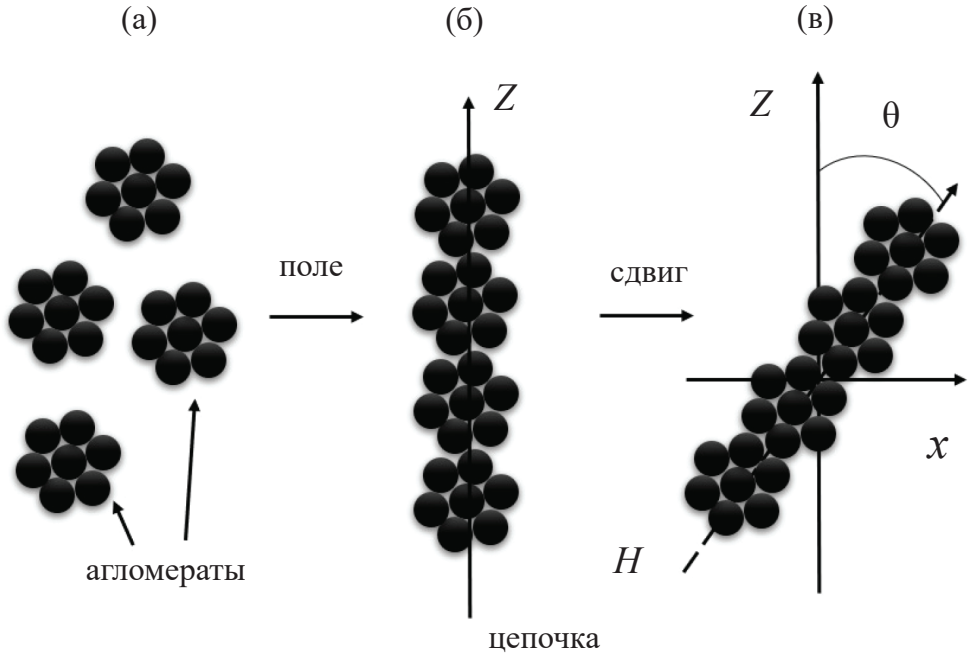

Иллюстрация расположения отдельных агломератов в эластомере до включения магнитного поля (а), цепочки в недеформированном образце (б) и цепочки в образце при сдвиговой деформации (в).

ВВЕДЕНИЕ

Магнитные нано- и микродисперсные композиты (феррогели, магнитные эластомеры, биологические ткани с внедренными магнитными частицами) состоят из магнитных нано- или микроразмерных частиц, внедренных в полимерную матрицу. Эти многофункциональные материалы привлекают большой интерес исследователей и практиков благодаря богатому набору физических свойств, перспективных для применения в высоких технологиях, таких как миниатюрные высокочувствительные датчики; экраны для избирательного поглощения электромагнитного излучения; разнообразные медико-биологические приложения – например, имплантируемые магнитоуправляемые матрицы роста и регенерации биологических тканей [1–14].

Одним из важных классов магнитных композитов являются магнитоактивные эластомеры (МАЭ), состоящие из микронных магнитных частиц, внедренных в эластомер. Эти материалы сочетают эластичность полимеров и высокий отклик на внешнее поле [15–18]. Под воздействием магнитного поля частицы МАЭ могут выстраиваться в структуры, вытянутые вдоль силовых линий поля [19, 20]. Это приводит к значительным изменениям макроскопических реологических, электрических и других физических характеристик композита, а также его формы [17, 18, 21–27].

Одним из перспективных направлений в области магнитных эластомеров является создание композитов с анизотропной внутренней структурой. Для этого их синтез осуществляется в присутствии внешнего магнитного поля. Намагниченные частицы, находясь в жидкой, еще не полимеризованной среде, образуют анизотропные структуры, вытянутые вдоль поля, которые сохраняются после полимеризации этой среды.

Целенаправленно создавая такие структуры в ходе синтеза магнитного композита, можно в широких пределах управлять его макроскопическими характеристиками. Исследование реологических свойств магнитных эластомеров при различных концентрациях магнитных частиц показало, что модули вязкоупругости анизотропных композитов могут в разы превышать аналогичные модули изотропных материалов с той же концентрацией внедренных частиц [28].

В теоретических работах [29–32] при вычислении модулей упругости магнитных эластомеров учитывались взаимодействия между магнитными частицами, но не учитывалось изменение структуры их расположения в полимере под действием магнитного поля. Этот подход уместен для достаточно жестких материалов, в которых сила упругого сопротивления матрицы существенно препятствует перемещению магнитных частиц. Магнитоупругие свойства изотропных и анизотропных МАЭ на основе мягких полимерных матриц, где перегруппировка частиц может быть значительной, остаются недостаточно исследованными.

Целью данной работы является теоретическое исследование мягких магнитоактивных эластомеров, состоящих из микронных намагничивающихся частиц без собственного магнитного момента, внедренных в полимерную среду. Рассматриваются композиты, имеющие после синтеза как изотропную, так и анизотропную внутреннюю структуру (т.е. синтезированные как в отсутствии, так и в присутствии внешнего магнитного поля). Внимание сконцентрировано на зависимостях модулей упругости таких материалов от внешнего магнитного поля.

Под действием поля частицы в мягких средах могут образовывать топологически различные анизотропные структуры. Полное описание таких структур современными методами статистической физики не представляется возможным, тем более что определяющее влияние на их формирование имеют особенности синтеза композита, морфология расположения частиц после его полимеризации.

Для того чтобы получить результаты в максимально прозрачной математической форме, мы моделируем их линейными цепочками, длина которых определяется балансом между силами магнитного межчастичного притяжения и силами упругого сопротивления несущего полимера смещению частиц. Предполагается, что длина цепочек меньше толщины образца. Очевидно, такое приближение может быть оправдано, если концентрация частиц существенно меньше концентрации плотной упаковки. Модель цепочек позволяет в простейшей форме учесть анизотропный характер внутренних структур, возникающих под действием магнитного поля. Как показано ниже, она позволяет при умеренных концентрациях частиц воспроизвести результаты измерений магнитореологических эффектов как в изначально изотропных, так и анизотропных материалах.

Структура работы следующая. Во второй части рассматривается модель, позволяющая оценить распределение цепочек по числу частиц в них и среднее число частиц в цепочке в первоначально изотропном композите. В части 3 предложена модель, позволяющая оценить модуль упругости композита с цепочечными структурами. В части 4 подход частей 2 и 3 используется для оценки модуля упругости анизотропного композита, в котором после синтеза образованы цепочечные агрегаты. Расчеты по предлагаемой модели сравниваются с экспериментальными результатами [28]. В этой работе были синтезированы две серии образцов магнитных композитов на мягкой полимерной основе с внедренными микронными частицами

карбонильного железа. Объемная концентрация частиц в образцах варьировалась в пределах 11–38%. Одна серия образцов была полимеризована в отсутствии магнитного поля, другая – в его присутствии. Под действием поля в композите на стадии синтеза образовывались видимые в микроскоп цепочечные структуры, вытянутые вдоль поля, которые фиксировались при его полимеризации. Судя по микрофотографиям полимеризованных композитов [28], длина цепочек в них была существенно меньше толщины образцов, что соответствует сделанному выше предположению о размерах цепочек. Проводились измерения влияния магнитного поля на сдвиговые реологические характеристики обоих серий образцов.

2. ИЗОТРОПНЫЕ КОМПОЗИТЫ

2.1. Физическая модель системы

В этом разделе рассмотрим модель изотропного магнитного эластомера, состоящего из упругой сплошной среды и внедренных в нее неброуновских намагничивающихся частиц, которые могут создавать анизотропные структуры под действием магнитного поля. Анализ структурирования частиц основан на идеях иерархической модели, предложенной в [33] для описания структур в композитах частицами пермаллоя.

Как показывают эксперименты [34–36] при полимеризации альгинатных суспензий, гидрогелей и феррогелей в отсутствии внешнего магнитного поля, магнитные частицы внутри материала распределяются неоднородно, формируя плотные сгустки (комки) – первичные агломераты. Измерения показывают, что модули упругости и вязкости таких композитов значительно превосходят значения, предсказываемые традиционными моделями композитных материалов и суспензий, рассматривающими отдельные частицы [29, 30]. Именно концепция первичных агломератов позволила объяснить в [33, 35] наблюдаемое сильное влияние концентрации частиц на свойства феррогелей, а также выраженные магнитореологические эффекты в жидких альгинатных суспензиях. Аналогичный эффект был обнаружен и в феррогелях, где в качестве наполнителя используются частицы пермаллоя [33, 35].

На основании этого мы будем предполагать, что при синтезе композита до включения поля частицы магнитного наполнителя объединялись в первичные агломераты, однородно и изотропно распределенные в несущей среде. Эти агломераты, как правило, состоят из случайного числа частиц и имеют случайную, геометрически нерегулярную форму. Здесь, чтобы получить физические результаты в максимально простом и обозримом виде, мы, как и в [33], будем моделировать их как одинаковые сферические кластеры, число частиц в которых оценим ниже.

Схематически рассматриваемая система представлена на рис. 1. Предполагается, что вначале на стадии полимеризации без магнитного поля

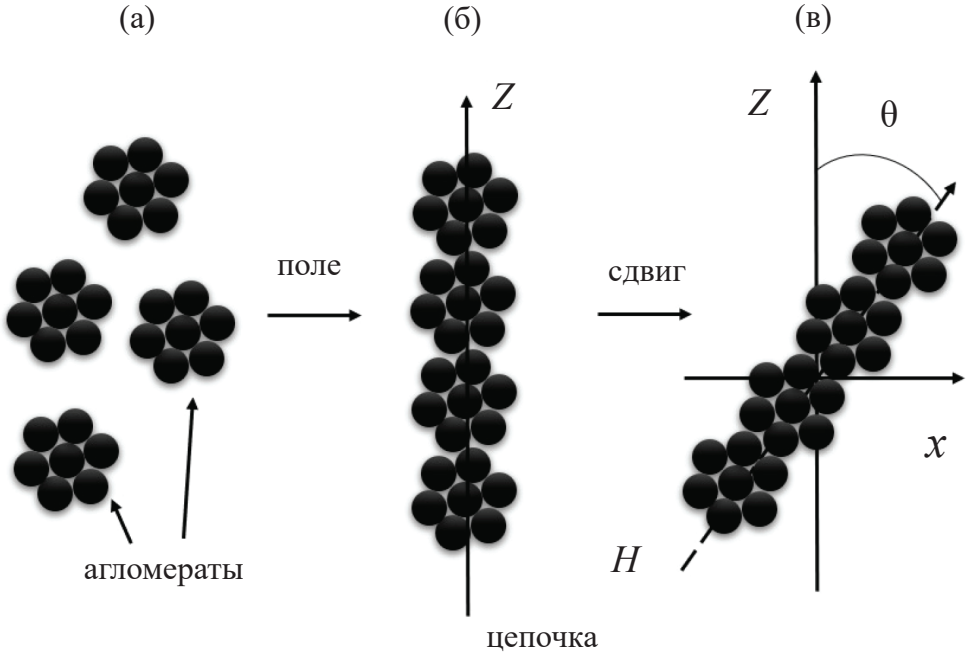

Рис. 1. Иллюстрация расположения отдельных агломератов в эластомере до включения магнитного поля (а), цепочки в недеформированном образце (б) и цепочки в образце при сдвиговой деформации (в).

агломераты частиц хаотично распределены в образце (рис. 1а) затем, при наложении магнитного поля, объединяются в цепочки, выстроенные вдоль поля (рис. 1б). Макроскопическая сдвиговая деформация материала приводит, в частности, к отклонению цепочек от направления магнитного поля (рис. 1в).

Необходимо отметить, что в реальных магнитных эластомерах частицы и их агломераты могут образовывать разнообразные топологически сложные, разветвленные структуры. Модель линейных цепочек – простейшая, позволяющая учесть возникающую под действием поля внутреннюю анизотропию композита. Как показано ниже, эта модель является вполне работоспособной, позволяя описывать экспериментальные результаты, по крайней мере, с точностью до порядка величины.

2.2. Распределение цепочек по числу агломератов

Нашей задачей является описание перехода системы из состояния (а) в состояние (б) на рис. 1 и определение среднего числа сферических первичных агломератов в цепочках при заданном магнитном поле.

Следуя [38], воспользуемся основными идеями иерархической модели формирования цепочек в магнитореологических материалах (эластомерах, гелях и жидкостях), совмещенными с решеточной моделью расположения агломератов. Отметим, что решеточный подход часто применяется в статистической физике газов и жидких систем [39].

Рассмотрим кубическую решетку, изображенную на рис. 2, с длиной ребра l. Эту длину оценим из условия, что отношение объема агломерата к объему ячейки равно объемной концентрации агломератов Φ в композите:

$$l = d_{\text{a}} \cdot \left(\frac{\pi}{6\Phi} \right)^{\frac{1}{3}}, \qquad (1)$$

здесь d_{a} – диаметр агломерата. Объемная концентрация агломератов Φ, конечно, больше, чем концентрация частиц в эластомере. Способ оценки Φ для данной экспериментальной ситуации обсуждается ниже.

Будем считать, что до включения поля центры всех агломератов в системе с равной вероятностью находятся в любой точке внутри линейного сегмента ячейки кубической решетки; длина сегмента $S_1 = l - d_{\text{a}}$; его центр совпадает с центром ячейки решетки (рис. 2). Обозначим случайное расстояние между центрами соседних частиц как l_{r}. Расстояние l_{r} принимает любое значение в пределах (рис. 2):

$$d_{\text{a}} \le l_{\text{r}} \le 2S_1 + d_{\text{a}}. \qquad (2)$$

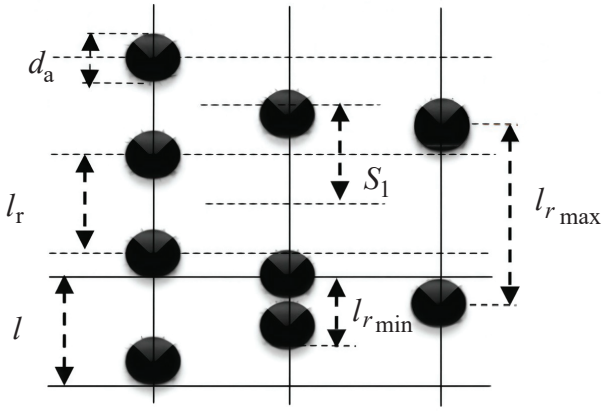

Рис. 2. Иллюстрация кубической решетки. Центры каждого агломерата могут располагаться в любой точке внутри его сегмента S_1.

Рассмотрим теперь объединение агломератов в цепочки, проиллюстрированное на рис. 3. В рамках иерархического подхода [39] мы рассматриваем образование цепочек как объединение одиночных агломератов в дублеты; затем – объединение дублетов в квартеты агломератов и т.д. Каждая цепочка состоит из $n = 2k$ агломератов, где $k = 0, 1...$ – номер этапа объединения. Различные этапы этого объединения проиллюстрированы на рис. 3.

Число агломератов в стабильной цепочке определяется конкуренцией сил магнитного притяжения между ними и силами упругого сопротивления полимера смещению агломератов. Для упрощения расчетов, как и в [33], мы не учитываем взаимодействие агломератов, расположенных на разных осях решетки.

Рассмотрим произвольную ось решетки, параллельную магнитному полю H_0 (рис. 3). Вначале агломераты находятся в одиночном состоянии, как это проиллюстрировано на левой оси рис. 3. Каждый центр одиночного агломерата может находиться с равной вероятностью в пределах своего собственного сегмента S_1, тогда центр дублета, состоящего из этих двух агломератов, может быть расположен в любой точке сегмента S_2, длина которого вычисляется как сумма сегментов одиночных агломератов $S_2 = 2l - 2d_{\text{a}} = 2S_1$.

Аналогичное предположение делается для центров кластеров из четырех агломератов, и так далее. Этот алгоритм объединения может быть продолжен далее до цепочки n-агломератов (см. рис. 3). Длина сегмента для цепочки из n-агломератов равен сумме длин сегментов n агломератов:

$$S_n = n \cdot S_1 = n \cdot \left(l - d_{\text{a}} \right). \qquad (3)$$

Рассмотрим две соседние n-агломератные цепочки и обозначим номер агломерата в одной из

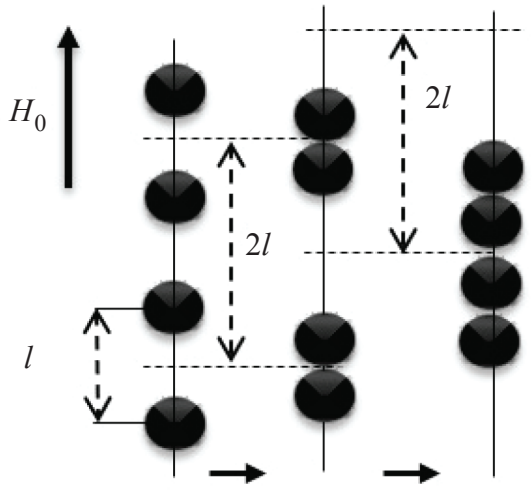

Рис. 3. Эскиз первых трех стадий (k = 0, 1, 2) агрегации агломератов. Горизонтальные стрелки иллюстрируют эволюцию агломератов с течением времени. Показаны сегменты возможных положений цепочек. Границы сегментов соответствуют полюсам агломератов на концах цепочек. Отдельные агломераты и цепочки показаны в центрах сегментов их возможных положений.

цепочек как j. Предположим, что «самый нижний» агломерат в «верхней» n-агломератной цепочке и «самый верхний» агломерат в «нижней» n-агломератной цепочке (см. иллюстрацию на рис. 4) имеют номер 1. Одиночные агломераты должны сместиться таким образом, чтобы образовать n-агломератную цепочку. Простые вычисления показывают, что для j-го одиночного агломерата такое смещение будет равно

$$\delta z_j^{(0)} = \left(\frac{n+1}{2} - j\right)\left(l_\mathrm{r} - d_\mathrm{a}\right). \quad (4)$$

Предположим теперь, что каждая из этих двух цепочек сместилась (под действием магнитного притяжения) по направлению к другой на расстояние ΔZ относительно положения формирования этих цепочек. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 4.

Общее смещение j-х агломератов верхней цепочки на рис. 4 относительно начального их положения, показанного на Рис. 2, равно:

$$\delta z_j = \delta z_j^{(0)} - \Delta Z = \left(\frac{n+1}{2} - j\right)\left(l_\mathrm{r} - d_\mathrm{a}\right) - \Delta Z. \quad (5)$$

Аналогично общее смещение j-го агломерата в нижней цепочке равно:

$$\delta z_j = -\delta z_j^{(0)} + \Delta Z = -\left(\frac{n+1}{2} - j\right)\left(l_\mathrm{r} - d_\mathrm{a}\right) + \Delta Z. \quad (6)$$

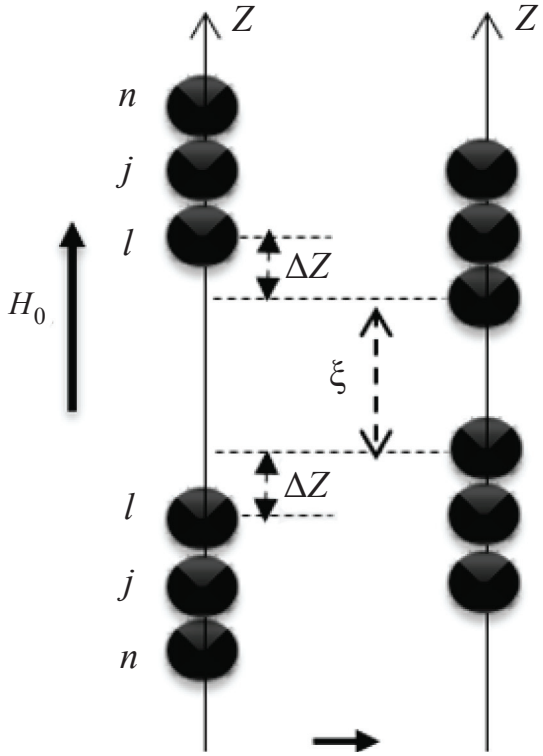

Рис. 4. Иллюстрация смещения цепочек навстречу друг другу. Слева – взаимное расположение цепочек сразу после их образования; справа – после смещения. Горизонтальная стрелка – эволюция во времени.

Удобно ввести расстояние ξ между центрами агломератов на ближайших концах цепочек (рис. 4). Легко показать, что выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \xi &= L_n - 2\Delta Z, \\ L_n &= n\left(l_\mathrm{r} - d_\mathrm{a}\right) + d_\mathrm{a}, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь L_n – расстояние между центрами ближайших агломератов соседних устойчивых n-агломератных цепочек; это расстояние зависит от начальных (для одиночных агломератов) случайных расстояний l_r. Используя эту формулу и уравнения (2), (3), получаем диапазон значений этого расстояния

$$d_\mathrm{a} \le L_n \le 2 \cdot S_n + d_\mathrm{a}. \quad (8)$$

Полную энергию деформации матрицы, соответствующую положениям цепочек, показанным на рис. 4, в приближении Гука можно представить как:

$$U_n^{(\mathrm{el})} = \beta \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\delta z_j^{(0)} - \Delta Z\right)^2 + \left(\Delta Z - \delta z_j^{(0)}\right)^2 \right], \quad (9)$$

здесь $\beta = 3\pi G_0 d_\mathrm{a}$, а G_0 – модуль сдвига матрицы [29].

Объединяя (5), (6), (7) и (9), приходим к следующей оценке для безразмерной упругой энергии:

$$U_n^{\mathrm{el}}(\xi) = \frac{\beta}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\left(n+1-2j\right)\left(l_{\mathrm{r}}-d_{\mathrm{p}}\right)+L_n-\xi\right)^2\right]. \quad (10)$$

Сила упругости, препятствующая сближению цепочек, равна

$$F_n^{\mathrm{el}}(\xi) = -\frac{dU_n^{\mathrm{el}}(\xi)}{d\xi} = \frac{\beta n}{2}\left(L_n-\xi\right). \quad (11)$$

Теперь оценим силу магнитного взаимодействия между цепочками из n-агломератов (рис. 2). В рамках простейшего диполь-дипольного приближения эту силу можно представить в виде суммы диполь-дипольного взаимодействия каждого агломерата одной цепочки с каждым агломератом другой:

$$F_n^{\mathrm{m}}(\xi) = -\frac{3\mu_0}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_i m_k}{r_{ik}^{\,4}}. \quad (12)$$

Здесь μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; m_i – магнитный момент i-го агломерата в одной из цепочек; r_{ik} – расстояние между центрами этого агломерата и k-го агломерата другой цепочки (рис. 5). Допустимость использования диполь-дипольного приближения в контексте рассматриваемой задачи обсуждается в Заключении.

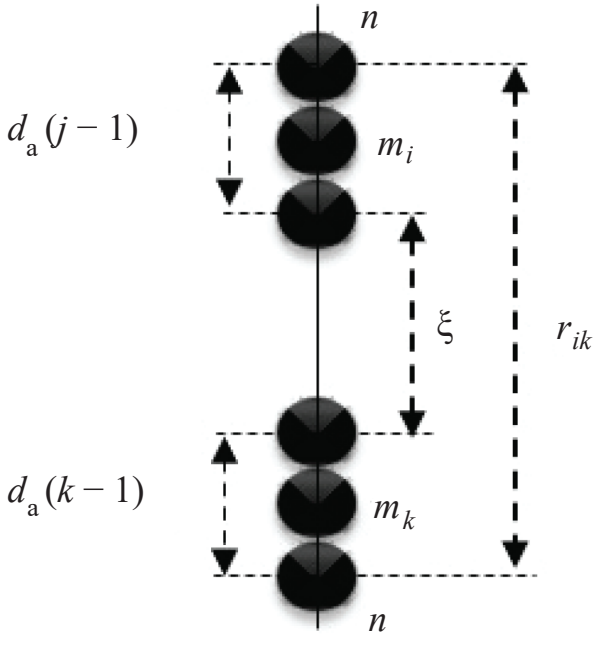

Рис. 5. Иллюстрация расстояния между центрами k-го и i-го агломератов, расположенных в соседних двух n-агломератных цепочках.

Будем считать, что магнитные моменты всех частиц в цепочках одинаковы. Результаты работы [37] показывают, что это приближение приводит к небольшому отклонению от более точного, но гораздо более громоздкого подхода, учитывающего зависимость моментов магнитных агломератов от их положения в цепочке. В (12) обозначим момент частицы в n-агломератной цепочке как $m_n = V_a M_n$, где V_a – объем агломерата, M_n – его намагниченность. Подставляя это соотношение в (12) с учетом $r_{ik} = \xi + d_a(i + k - 2)$ (рис. 5), приходим к следующему выражению

$$F_n^{\mathrm{m}}(\xi) = -\frac{3\mu_0 V_a^{\,2} M_n^{\,2}}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\xi+d_a\left(i+k-2\right)\right)^4}. \quad (13)$$

Из-за сложной формы поверхности цепочки математически строгий расчет намагниченности M_n невозможен. Здесь, чтобы получить физически прозрачные результаты, мы оценим M_n для цепочки n-агломератов как намагниченность эллипсоида вращения с большой и малой осями, равными nd_a и d_a соответственно. Эллипсоидальная модель цепочки в недеформированном и деформированном образцах проиллюстрирована на рис. 6. Отметим, что такой подход недавно был успешно использован для расчетов реологических свойств жидких альгинатных суспензий с магнитными частицами [35].

В рамках эллипсоидальной модели магнитное поле H_{in} внутри цепочки можно определить с помощью классического соотношения теории магнитостатики [40]:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{in}\parallel} &= H_0\cos\theta - M_{\parallel}N_{\parallel}, \\ H_{\mathrm{in}\perp} &= -H_0\sin\theta - M_{\perp}N_{\perp}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь θ – угол отклонения оси эллипсоида от оси z (т.е. от внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$) вследствие макроскопической сдвиговой деформации образца. Символами $\parallel$ и $\perp$ обозначены компоненты векторов, параллельные и перпендикулярные главной оси эллипсоида; $N_{\parallel}$ и $N_{\perp}$ – размагничивающие факторы эллипсоида вдоль и перпендикулярно этой оси [40]:

$$\begin{aligned} N_{\parallel} &= \frac{1}{n^2-1}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)-1\right], \\ N_{\perp} &= \left(1-N_{\parallel}\right)/2. \end{aligned} \quad (15)$$

Вообще говоря, намагниченность агломерата нелинейно зависит от поля H_0. Используя

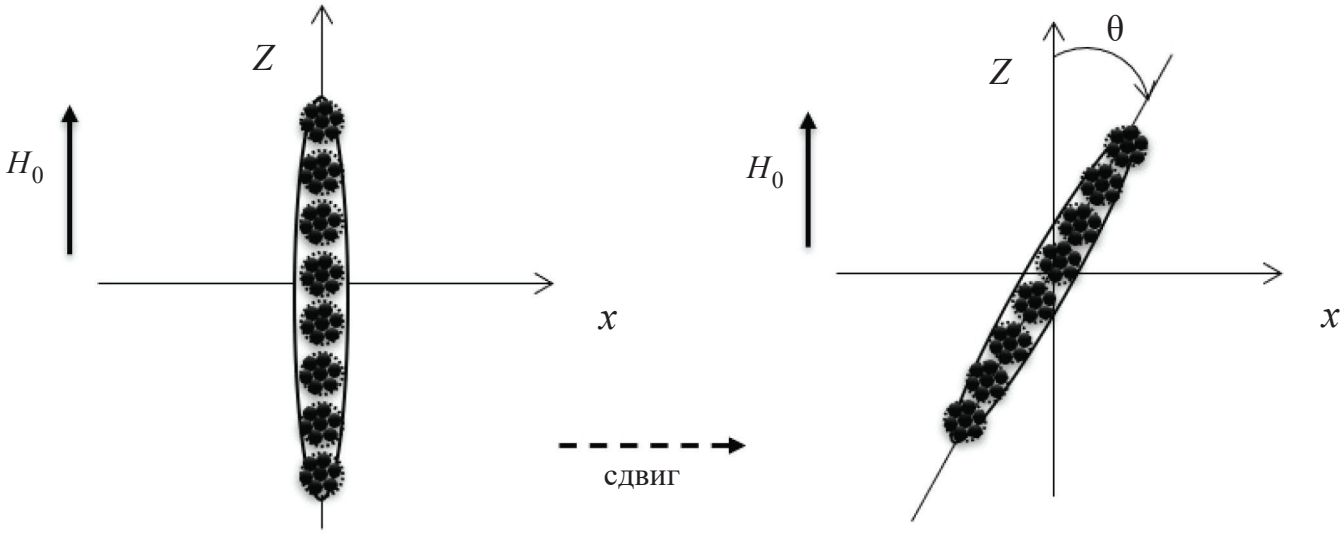

Рис. 6. Иллюстрация моделирования цепочечных агломератов как эллипсоидов вращения вдоль оси *z*. Цепочка, параллельная приложенному полю, соответствует недеформированному образцу, наклонная цепочка соответствует смещенному образцу.

полуэмпирическое соотношение Фрелиха-Кеннелли [41], представим:

$$M = \chi \cdot H_{\text{in}}, \chi = \frac{\chi_0 M_{\text{s}}}{M_{\text{s}} + \chi_0 H_{\text{in}}}, \tag{16}$$

где χ_0 и M_{s} – начальная восприимчивость материала агломерата и его намагниченность насыщения соответственно; χ – восприимчивость агломерата во внутреннем поле H_{in}.

В этом разделе мы рассматриваем недеформированный образец и положим угол $\theta = 0$ (рис. 6). Объединяя (14) и (16), получаем

$$M_n = M_z = \frac{\chi_0 H_0 + M_{\text{s}}\left(1+\chi_0 N_{\parallel}\right) - \sqrt{\left(\chi_0 H_0 + M_{\text{s}}\left(1+\chi_0 N_{\parallel}\right)\right)^2 - 4\chi_0{}^2 M_{\text{s}} H_0 N_{\parallel}}}{2N_{\parallel}\chi_0}. \tag{17}$$

Нижний индекс *n* здесь отмечает намагниченность *n*-агломератной цепочки.

Запишем полную силу, действующую на *n*-агломератную цепочку со стороны второй цепочки и полимерной матрицы, как

$$F_n\left(\xi, L_n\right) = F_n^{\text{m}}\left(\xi\right) + F_n^{\text{el}}\left(\xi, L_n\right). \tag{18}$$

Силы магнитного взаимодействия цепочек $F_n^{\text{m}}\left(\xi\right)$ и упругого сопоротивления среды $F_n^{\text{el}}\left(\xi, L_n\right)$ определены в (12, 13) и (11) соответственно.

Образование устойчивой цепочки из 2*n*-агломератов двумя *n*-агломератными цепочками зависит от конкуренции магнитных и упругих сил, действующих на цепочки. Действительно, агломераты образуют цепочки из-за магнитного притяжения, однако упругие силы, возникающие в содержащей их среде вследствие смещения агломератов, этому препятствуют. В (11), (12) силы магнитного притяжения отрицательны, упругие силы положительны. Для создания новой цепочки общая сила в (18) должна быть отрицательной для всех значений ξ, L_n.

Введем критические значения ξ_{c}, L_{c_n} этих расстояний, соответствующие агрегированию цепочек 2*n*-агломератов под действием заданного магнитного поля (рис. 5). Эти величины можно найти из следующих условий для полной силы (см. подробное объяснение в [33]):

$$F_n\left(\xi_{\text{c}}, L_{\text{c}n}\right) = 0, \frac{dF_n\left(\xi, L_n\right)}{d\xi}\Big|_{\xi_{\text{c}}, L_{\text{c}_n}} = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь сформированную цепочку с количеством агломератов в ней *n*. Обозначим число таких *n*-агломератных цепочек в единичном объеме системы как g_n. Эта функция распределения удовлетворяет следующему условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{\infty} n g_n = \frac{\Phi}{V_{\text{a}}}. \tag{20}$$

Отметим, что отношение $\frac{\Phi}{V_{\text{a}}}$ представляет собой общее число агломератов в единице объема композита.

Расстояние $L_1 = l_r$ между отдельными агломератами (до их агрегирования) имеет случайный характер, а расстояние L_n между устойчивыми цепочками n-агломератов зависит от l_r (7). С равной вероятностью L_n может иметь любое значение в пределах неравенства (8). Объединение агломератов в цепочки произойдет при выполнении неравенства $L_n < L_{cr_n}$. Учитывая это, преобразуем неравенство (8) в виде

$$0 \le \frac{L_{cr_n} - d_a}{2 \cdot S_n} \le 1, \qquad P_n = \frac{L_{cr_n} - d_a}{2 \cdot S_n}. \tag{21}$$

Величина $\frac{L_{cr_n} - d_a}{2 \cdot S_n}$ представляет собой вероятность P_n образования $2n$-агломератной цепочки в результате объединения двух n-агломератных цепочек.

Функция распределения g_n определяется через вероятность P_n следующим образом (см., также, [33]). Учтем, что в рамках рассматриваемой модели n-агломератная цепочка образуется объединением двух $n/2$-агломератных цепочек. В свою очередь, $n/2$-агломератная цепочка образована в результате объединения двух $n/4$-агломератных цепочек и т.д. вплоть до одиночных агломератов (рис. 3). Таким образом, для определения g_n необходимо учесть все вероятности $P_n, P_{n/2}, P_{n/4}, \ldots, P_2, P_1$:

$$g_n = \frac{\Phi}{nV_a}(1 - P_n)P_{n/2}P_{n/4}P_{n/8} \cdot \ldots \cdot P_2P_1 = \frac{\Phi}{nV_a}(1 - P_n)\prod_{i=1}^{n} P_i,$$

$$g_1 = \frac{\Phi}{V_a}(1 - P_1). \tag{22}$$

Здесь множитель $\frac{\Phi}{V_a n}$ – вероятность того, что в системе присутствуют только n-агломератные цепочки в единице объема, P_1 – вероятность образования 2-агломератной цепочки, g_1 – число одиночных агломератов. Несложный анализ показывает, что функция (22) удовлетворяет условию нормировки (20). Напомним, что g_n – число n-агломератных цепочек в единичном объеме системы. Используя (20), можно определить среднее число агломератов $\langle n \rangle$ в цепочках:

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n g_n}{\sum_{n=1}^{\infty} g_n} = \frac{\Phi}{V_a} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} g_n}. \tag{23}$$

Система (19) может быть решена численно, что позволяет для каждого n найти соответствующую длину сегмента L_{c_n}, после чего, используя (3), (21), (22), (23), определить вероятность P_n и функцию распределения g_n, а также среднее число $\langle n \rangle$ агломератов в цепочке. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 7.

3. МОДУЛИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТА

Рассмотрим магнитный эластомер, состоящий из упругой матрицы и одинаковых удлиненных намагничивающихся цепочек; число агломератов в цепочке равно среднему числу $\langle n \rangle$, определенному в (23). Пусть, как в экспериментах [28], композит испытывает малый макроскопический

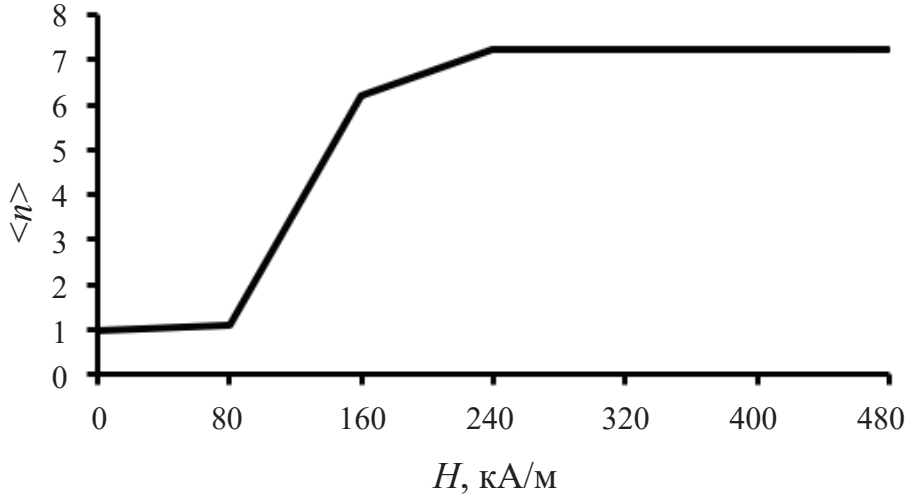

Рис. 7. Среднее число частиц $\langle n \rangle$ в цепочках в зависимости от приложенного магнитного поля H. Параметры системы: $\chi_0 = 1000$, $G_0 = 1.58$ кПа, $M_s = 550$ кА/м, $d_a = 10$ мкм, $\Phi = 0.34$.

сдвиг в направлении перпендикулярно полю (рис. 1в и 6.). Следуя общей теории механики полярных сред (например, [42, 43]), модуль сдвига композита можно представить в виде:

$$G = G_s + G_a. \tag{24}$$

Здесь первое слагаемое соответствует симметричному напряжению, которое возникает из-за упругих деформаций в матрице композита; второй член соответствует антисимметричному напряжению, вызванному магнитными моментами, действующими на цепочки. Для оценки G_s можно использовать соотношение Кригера–Догерти [44, 45]:

$$G_s(n) = G_0\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_m}\right)^{-[G(n)]\Phi_m}, \tag{25}$$

успешно применявшееся для расчетов вязкости и модулей вязкоупругости жидких магнитных суспензий и полимеризованных феррогелей [35, 45].

Здесь Φ – объемная концентрация агломератов, Φ_m – объемная концентрация плотной упаковки; $[G(n)]$ определяется, как и в [33], из условия, что комплекс $G_0(1+[G(n)]\Phi)$ равен модулю упругости предельно разбавленного ($\Phi \ll 1$) композита, G_0 – модуль сдвига матрицы.

Чтобы оценить $[G(n)]$, как и в [33], цепочечные агрегаты представляем в виде эллипсоидов вращения, показанных на рис. 6, с малой и большой осями, равными d_a и nd_a соответственно. Важно отметить, что объем такого эллипсоида равен суммарному объему агломератов в цепочке. Используя результаты механики суспензий эллипсоидальных частиц [43], приходим к следующему соотношению:

$$[G(n)] = \alpha(n) + \frac{\zeta(n) + \beta(n)\lambda(n) + \beta(n)}{2} + \\ + \chi(n) - 2\beta(n)\lambda(n). \tag{26}$$

Здесь $\alpha(n),...\lambda(n)$ – форм-факторы эллипсоида, приведенные в Приложении. В [46] показано, что влияние отдельных удлиненных частиц (в нашем случае – цепочек) на макроскопические свойства композитов преобладает над эффектами межцепочечного взаимодействия. Это позволяет применить (26) для широкого круга объемных концентраций агломератов.

Поскольку агломераты в цепочке состоят из магнитных частиц, необходимо оценить объемную концентрацию Φ этих агрегатов. Ее невозможно рассчитать теоретически, поскольку она определяется неконтролируемыми процессами синтеза композита, детали которых определить не представляется возможным, и не равна объемной доли внедренных частиц. Однако Φ можно оценить из экспериментов для композитов в отсутствии поля, когда агломераты можно рассматривать как отдельные сферы, показанные на рис. 1а. Используя (25), получаем:

$$\Phi = \left(1 - \left(\frac{G_{s\ exp}^{0}}{G_0}\right)^{\frac{-1}{[G(1)]\Phi_m}}\right)\Phi_m. \tag{27}$$

Здесь $[G(1)] = 5/2$ (26) – классический множитель Эйнштейна, получаемый для систем одиночных сфер.

Для изотропных образцов, использованных в [28] с объемной концентрацией частиц $\varphi = 0.33$, модуль сдвига при нулевом поле $G_{s\ exp}^{0} = 36.2$ кПа,что дает концентрацию агломератов $\Phi_{isot} \approx 0.341$ при $G_0 = 7.8$ кПа.Оценки концентрации первичных агломератов при других концентрациях магнитных частиц приведены в подписях к рис. 9, 10.

Рассмотрим эллипсоид, отклоненный от направления магнитного поля на угол θ (рис. 6). Антисимметричную часть G_a в (24) можно оценить так [43]

$$G_a = \frac{\Phi}{2 \cdot V_{el}} \frac{\Gamma_m(\theta)}{\gamma}. \tag{28}$$

(см. также [33])

Здесь γ – величина макроскопической сдвиговой деформации; $V_{el} = V_a \cdot n$ – объем эллипсоида; $\Gamma_m(\theta)$ – момент силы, действующий на эллипсоид со стороны внешнего магнитного поля H_0, равный [40]:

$$\Gamma_m(\theta) = \mu_0 V_{el} \int_0^{H_0} M_x(H, \theta)\, dH. \tag{29}$$

Здесь $M_x(H)$ – намагниченность эллипсоида в поле H (играющем роль H_0).

Декартовы составляющие намагниченности эллипсоида связаны с параллельными и перпендикулярными, относительно главной оси эллипсоида, компонентами следующим образом:

$$M_z = M_{\parallel}\cos, - M_{\perp}\sin,, \\ M_x = M_{\perp}\cos, + M_{\parallel}\sin,. \tag{30}$$

Компоненту M_x, как функцию от H и θ, можно найти, объединив (14), (16) и (30). Напомним, что здесь θ – угол отклонения эллипсоида,

моделирующего цепочку, от магнитного поля в результате макроскопического смещения $u_x = \gamma z$ в образце. Этот угол можно оценить из соображений баланса магнитного и упругого момента сил, действующих на эллипсоид. Используя результаты [43] и идентичность уравнений деформирования упругой среды и Навье–Стокса при малых числах Рейнольдса, в линейном приближении относительно угла θ и макроскопической сдвиговой деформации γ получаем

$$\theta = \gamma - \frac{\Gamma_m(\theta)}{4G_0\left(1+\langle n\rangle^2\right)}\left(1 - N_{\parallel} + 2\langle n\rangle^2 N_{\parallel}\right). \quad (31)$$

Вычисляя $\Gamma_m(\theta)$ в (29) в линейном по θ приближении, можно найти θ в явной форме, которую для краткости здесь опускаем.

Подставляя θ, полученное как решение (31), в (24–26) и (28), определяем модуль упругости G композита при заданном сдвиге γ. Ниже приведены

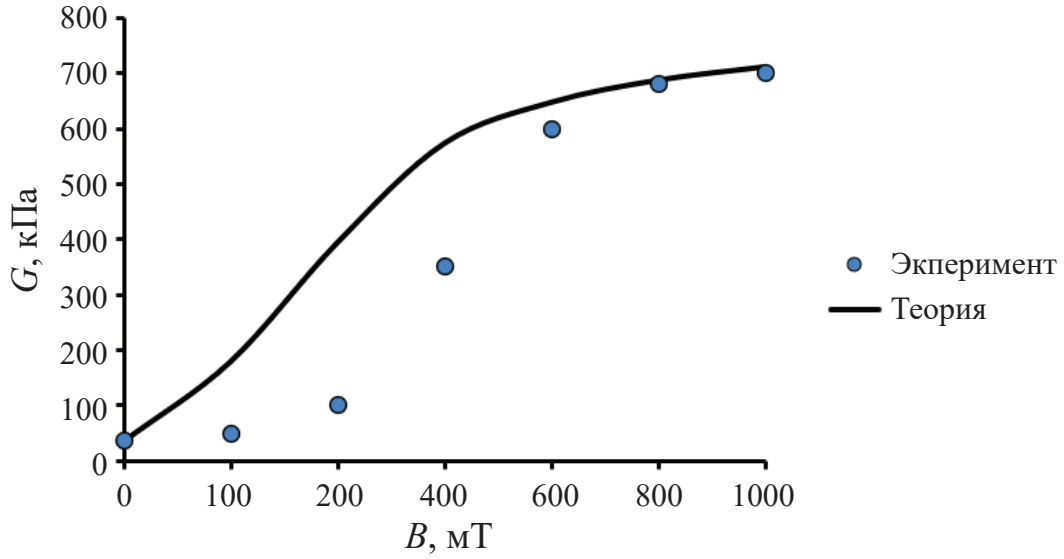

Рис 8. Модуль сдвига изотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\chi_0 = 25$, $G_0 = 7.8$ кПа, $M_s = 325$ кА/м, $d_a = 10$ мкм, $\Phi_{isot} \approx 0.402$, $\Phi_m = 0.67$. Концентрация частиц из эксперимента $\varphi = 0.33$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

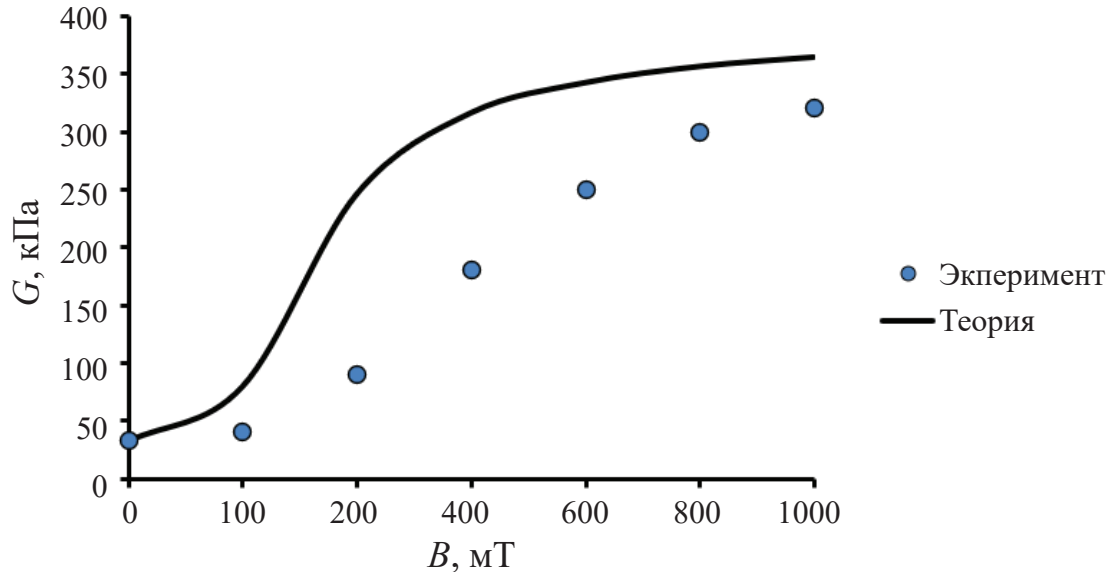

Рис. 9. Модуль сдвига изотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\chi_0 = 25$, $G_0 = 7.9$ кПа, $M_s = 325$ кА/м, $d_a = 10$ мкм, $\Phi_{isot} \approx 0.384$, $\Phi_m = 0.67$. Концентрация частиц из эксперимента $\varphi = 0.27$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

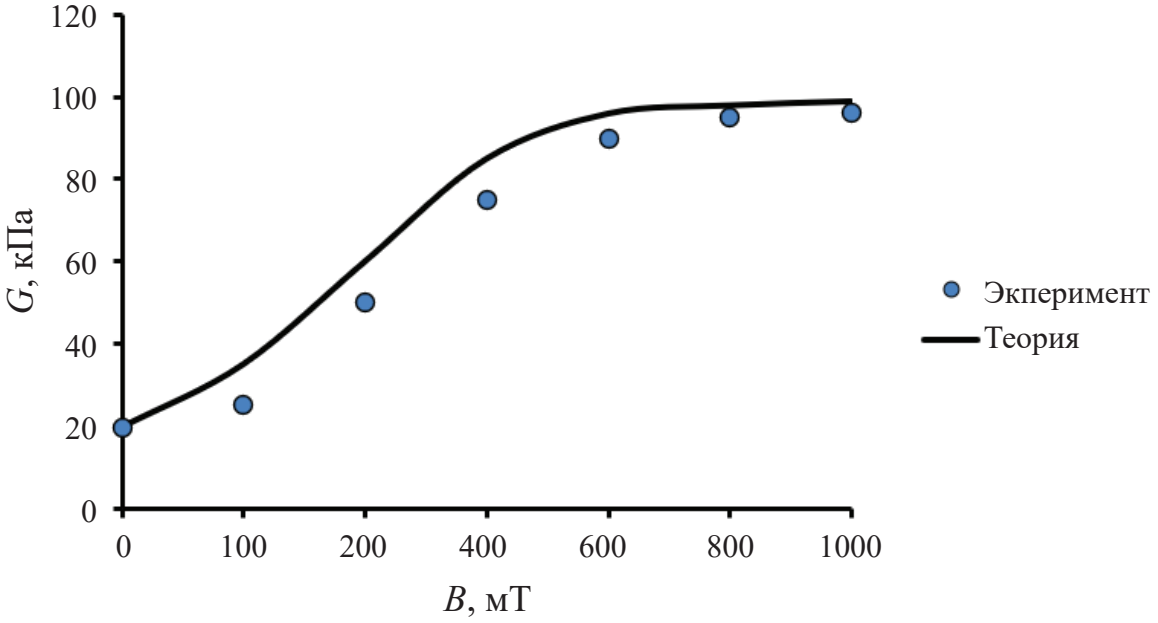

Рис. 10. Модуль сдвига изотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\chi_0 = 30$, $G_0 = 6$ кПа, $M_s = 300$ кА/м, $d_a = 10$ мкм, $\Phi_{isot} \approx 0.294$, $\Phi_m = 0.45$. Концентрация частиц из эксперимента $\varphi = 0.16$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

результаты сравнения расчетов по предложенной модели с экспериментальными данными [28], полученными для очень малых деформаций γ. Сравнение расчетов при $\gamma \to 0$ с экспериментальными данными в зависимости от магнитного поля для трех значений концентраций представлено на рис. 8–10.

4. АНИЗОТРОПНЫЕ КОМПОЗИТЫ

При моделировании анизотропных композитов необходимо учитывать тот факт, что их полимеризация проводилась в магнитном поле, которое спровоцировало образование цепочечных структур. Размер этих цепочек определяется полем, в котором производилась полимеризация, подвижностью агломератов в жидком полимере и другими факторами. Влияние условий полимеризации магнитных эластомеров на размер образующихся в них структур не изучен. Поэтому здесь будем считать, что анизотропный образец при нулевом поле состоит из уже сформировавшихся цепочек, длину которых оценим из измерений модуля упругости в нулевом поле. Для анизотропного образца с объемной концентрацией $\varphi = 0.33$ магнитных частиц измерения [28] в нулевом поле дают модуль сдвига $G^0_{s\ exp} \approx 112$ кПа (рис. 10). Из соотношений (26), (27) получаем оценки $\Phi_{anis} \approx 0.34$ и $n \approx 2.1$, приводящие к наилучшему соответствию вычисляемых и измеренных значений модуля сдвига при нулевом поле.

Объединение цепочек под действием магнитного поля может быть описано в рамках той же решеточной иерархической модели, что и для изотропного образца. Рассмотрим в качестве примера композит с концентрацией частиц $\varphi = 0.33$. Единственное отличие состоит от рассмотренного в предыдущем разделе описания структурирования изотропного образца в том, что «стартовые» цепочки, с которых начинается структурирование во внешнем поле, состоят не из одного агломерата, а формально из 2.1. Отметим, что 2.1 – это среднее число, поэтому противоречия с тем, что число агломератов в цепочке должно быть целым, нет. Затем применяем решеточную модель к таким цепочкам, описанную в предыдущей главе. Результаты сравнения расчётов и эксперимента для анизотропных композитов для трех значений концентраций представлены на рис. 10–12.

На рис. 14, 15 представлены сравнения расчетов по предложенной модели и экспериментов [48] с анизотропными магнитными эластомерами.

На рис. 8–15 демонстрируется, что представленная модель по крайней мере по порядку величины воспроизводит экспериментальные результаты различных экспериментальных работ, в том числе вывод [28] о том, что модуль сдвига анизотропных композитов в 2–3 раза превышает модуль изотропных композитов с той же концентрацией частиц.

Отметим, что в отличие от многих композитных материалов, упругие характеристики мягких полимеров могут изменяться в результате внедрения

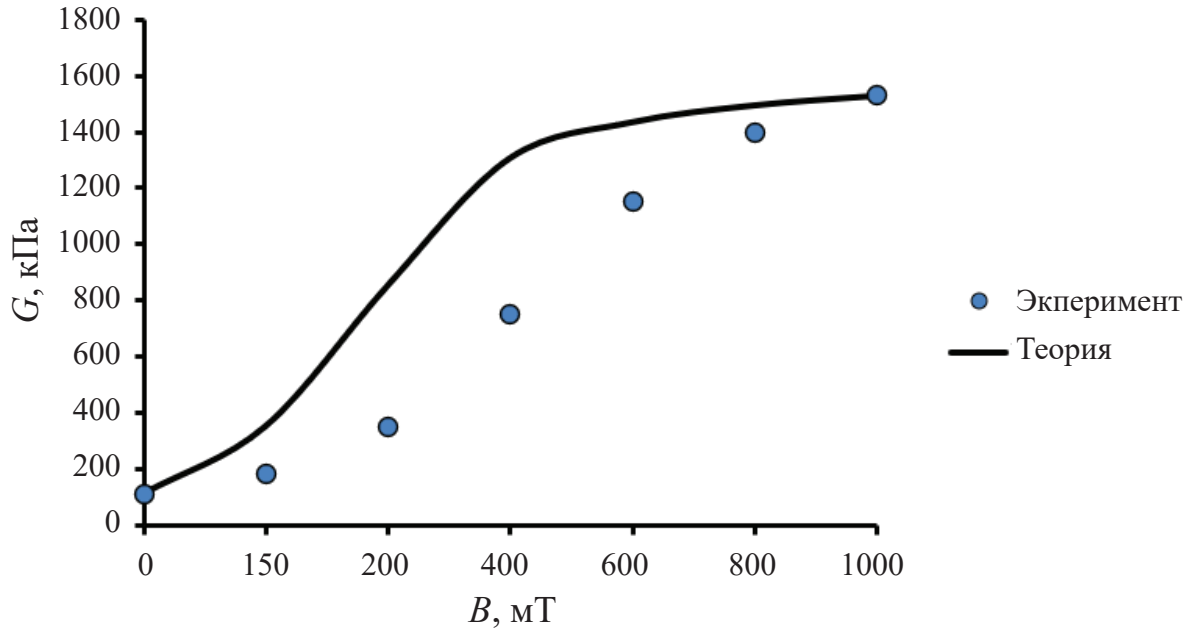

Рис. 11. Модуль сдвига анизотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\Phi_m = 0.67$, $\chi_0 = 25$, $G_0 = 5.5$ кПа, $M_s = 325$кА/м, $V_{ch} = 2.1V_a$, $\Phi_{anis} \approx 0.402$. Концентрация частиц в образце эксперимента $\varphi = 0.33$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

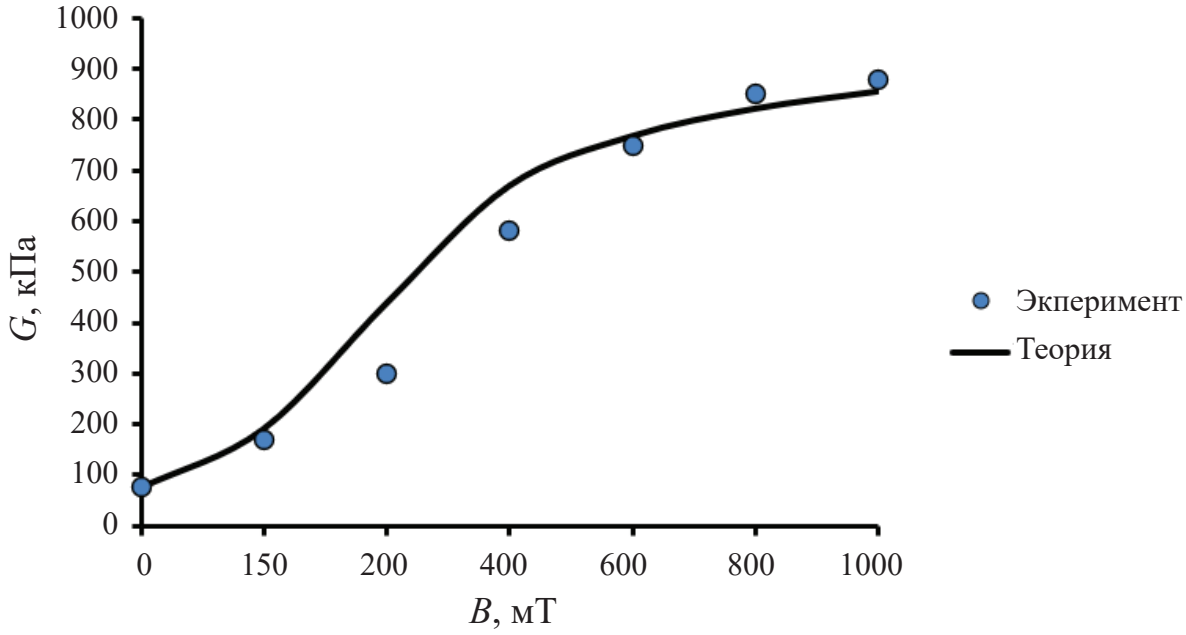

Рис. 12. Модуль сдвига анизотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\chi_0 = 25$, $G_0 = 5.3$ кПа, $M_s = 308$ кА/м, $V_{ch} = 2V_a$, $\Phi_{anis} \approx 0.384$, $\Phi_m = 0.67$. Концентрация частиц в образце эксперимента $\varphi = 0.27$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

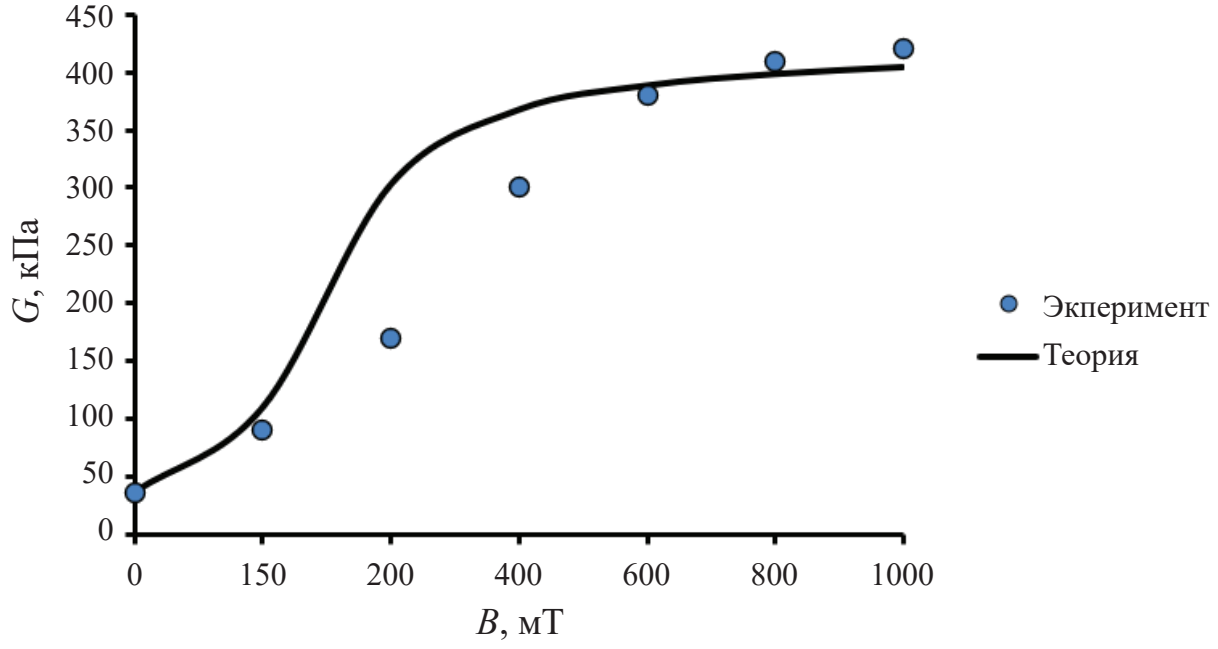

Рис. 13. Модуль сдвига анизотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\gamma = 0.001$, $\chi_0 = 50$, $G_0 = 10.0$ кПа, $M_s = 650$кА/м, $V_{ch} = 1.1V_a$, $\Phi_{anis} \approx 0.294$, $\Phi_m = 0.45$. Концентрация частиц в образце эксперимента $\varphi = 0.16$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [28].

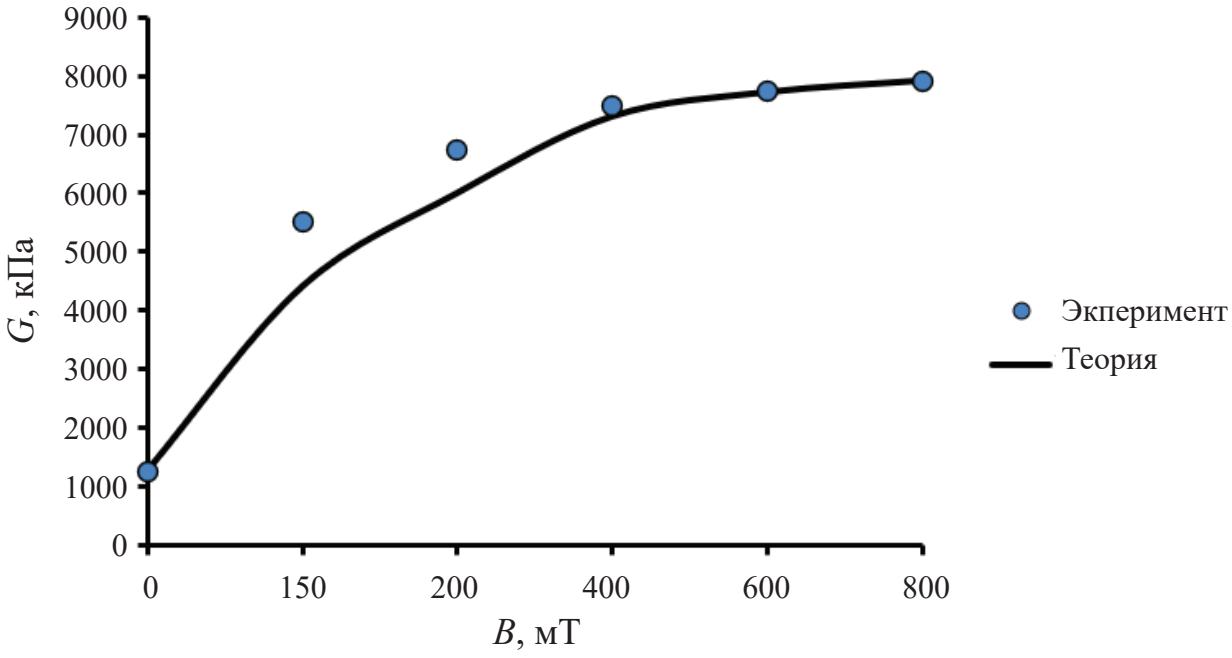

Рис. 14. Модуль сдвига анизотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\chi_0 = 100$, $G_0 = 20.0$ кПа, $M_s = 545$кА/м, $V_{ch} = 2.2V_a$, $\Phi_{anis} \approx 0.4$, $\Phi_m = 0.5$. Концентрация частиц в образце $\varphi = 0.33$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [48].

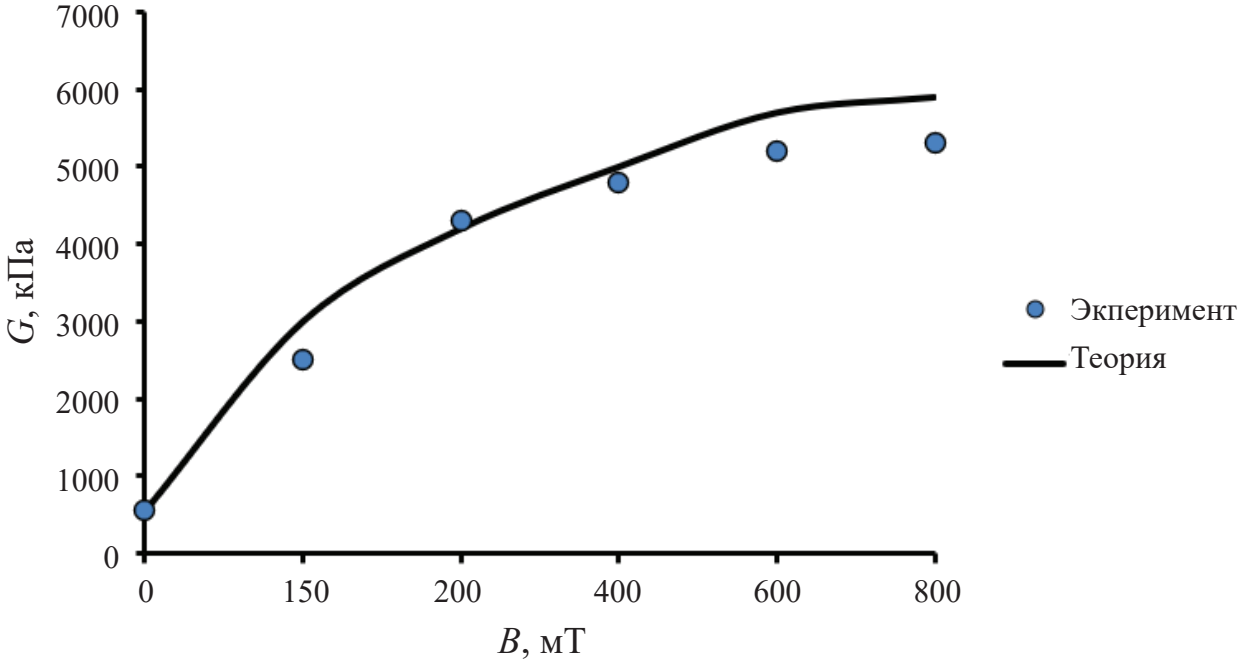

Рис 15. Модуль сдвига анизотропного эластомера в зависимости от приложенного магнитного поля. Параметры системы: $\chi_0 = 100$, $G_0 = 15.0$ кПа, $M_s = 540$кА/м, $V_{ch} = 1.5V_a$, $\Phi_{anis} \approx 0.35$, $\Phi_m = 0.5$. Концентрация частиц в образце $\varphi = 0.19$. Линия – теория, точки – экспериментальные данные [48].

в них магнитных частиц (см., например, [36]). Это изменение может происходить либо в результате адгезии части полимера на поверхностях частиц, либо химического влияния частиц на образование сшивок между макромолекулами и определяется конкретными условиями полимеризации образца. Поэтому значения модуля сдвига G_0 несущего полимера, подбираемые из условий наилучшего совпадения теории и эксперимента, на рис. 8–13 и 14, 15 несколько отличаются друг от друга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Макроскопические реологические свойства магнитных эластомеров определяются структурами, образующими в них частицами магнитного наполнителя. Если композит был полимеризован в отсутствии поля, эти структуры макроскопически изотропны; если в присутствии поля – анизотропны. Эксперименты [28] с мягкими эластомерами показали сильный магнитореологический эффект в этих системах, и существенно (в разы) большую жесткость анизотропных композитов по сравнению с изотропными.

Для объяснения микроскопической природы этих эффектов нами предложена теоретическая модель, основанная на предположении о том, что частицы в композитах находятся не в одиночном состоянии, а на стадии синтеза образуют плотные агломераты, наблюдаемые в ряде экспериментов.

Под действием поля такие агломераты могут образовывать топологически сложные анизотропные структуры. Для того чтобы получить результаты в максимально прозрачном виде, мы моделировали их наиболее простыми цепочечными структурами, длина которых определяется конкуренцией между силами магнитного притяжения агломератов и упругим сопротивлением, которое оказывает несущий полимер их смещениям. Как показывает сопоставление полученных результатов с измерениями [28], цепочечная модель приводит к приемлемому согласию с экспериментами для умеренных концентраций частиц, существенно меньших концентрации плотной упаковки. Силы магнитного взаимодействия между частицами мы оценивали в рамках простейшего диполь-дипольного взаимодействия, приводящего к хорошему согласию с предсказаниями намного более громоздкой многополярной модели, когда толщина щели между поверхностями частиц примерно равна или больше диаметра частицы [47]. Этого достаточно для оценки критического расстояния между агломератами, при котором происходит их объединение вплоть до плотного контакта.

Несмотря на простоту цепочечной модели, она позволяет количественно воспроизвести результаты экспериментов по магнитореологическим эффектам как в изотропных, так и в анизотропных средах, в том числе то, что модуль упругости анизотропных композитов оказывается в несколько

раз больше, чем изотропных. Необходимо подчеркнуть, что предложенная модель существенно основана на предположении о том, что внедренные частицы магнитомягкие, у них отсутствуют собственные магнитные моменты, в том числе – остаточные, которые и в отсутствии поля на стадии синтеза могут спровоцировать образование анизотропных агрегатов с нескомпенсированными магнитными моментами. Материалы с частицами, обладающими собственными моментами, требуют отдельного, прежде всего – экспериментального исследования.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, FEUZ 2023-0020.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

В данной работе отсутствуют исследования человека или животных.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы не имеют конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boczkowska A.*, *Awietjan S.F.* Tuning active magnetorheological elastomers for damping applications // Materials Science Forum. 2010. V. 636–637. P. 766. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.636-637.766
2. *Lopez-Lopez M.T.*, *Scionti G.*, *Oliveira A.C.*, *Duran J.D.G.*, *Campos A.*, *Alaminos M.*, *Rodriguez I.A.* Generation and characterization of novel magnetic field-responsive biomaterials // PLOS ONE. 2015. Vol. 10. № 7. P. e0133878. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0133878
3. *Bira N.*, *Dhagat P.*, *Davidson J.R.* A review of magnetic elastomers and their role in soft robotics // Front. Robot. AI. 2020. V. 7. P. 588391. https://doi.org/10.3389/frobt.2020.588391
4. *Kurlyandskaya G.V.*, *Blyakhman F.A.*, *Makarova E.B.*, *et al.* Functional magnetic ferrogels: From biosensors to regenerative medicine // AIP Advances. 2020. V. 10. № 12. P. 125128. https://doi.org/10.1063/9.0000021
5. *Rajan A.*, *Sahu N.* Review on magnetic nanoparticle-mediated hyperthermia for cancer therapy // J. Nanopart Res. 2020. V. 22. P. 319. https://doi.org/10.1007/s11051-020-05045-9
6. *Vilas-Boas V.* Magnetic hyperthermia for cancer treatment: Main parameters affecting the outcome of *in vitro* and *in vivo* studies // Molecules. 2020. V. 25 № 12. P. 2874. https://doi.org/10.3390/molecules25122874
7. *Li Lingbing.* Handbook of materials for nanomedicine: Polymeric nanomaterials. Jenny Stanford Publishing. 2020.
8. *Chung H-J*, *Parsons A.*, *Zheng L.* Magnetically controlled soft robotics utilizing elastomers and gels in actuation: A review // Adv. Intell. Syst. 2021. V. 3. № 3. P. 2000186. https://doi.org/10.1002/aisy.202000186
9. *Kaewruethai T.*, *Laomeephol C.*, *Pan Y.*, *Luckanagul J.* Multifunctional polymeric nanogels for biomedical applications // Gels. 2021. V. 7. P. 228. https://doi.org/10.3390/GELS7040228
10. *Sung B.*, *Kim M-H.*, *Abelmann L.* Magnetic microgels and nanogels: Physical mechanisms and biomedical applications // Bioeng. Transl. Med. 2021. V. 6. № 1. P. e10190. https://doi.org/10.1002/btm2.10190
11. *Imran M.M.*, *Affandi A.M.*, *Alam M.M.*, *Khan A.*, *Khan A.I.* Advanced biomedical applications of iron oxide nanostructures based ferrofluids // Nanotechnology. 2021. V. 32. № 42. P. 422001. https://doi.org/10.1088/1361-6528/ac137a
12. *Naghdi M.*, *et al.* Magnetic nanocomposites for biomedical applications // Advances in Colloid and Interface Science. 2022. V. 308. P. 102771. https://doi.org/10.1016/j.cis.2022.102771
13. *Socoliuc V.*, *Avdeev M.V.*, *Kuncser V.*, *Turcu R.*, *Tombácz E.*, *Vékás L.* Ferrofluids and bio-ferrofluids: looking back and stepping forward // Nanoscale. 2022. V. 14. № 13. P. 4786–4886. https://doi.org/10.1039/D1NR05841J
14. *Montiel Schneider M.G.*, *Martín M.J.*, *Otarola J.*, *Vakarelska E.*, *Simeonov V.*, *Lassalle V.*, *Nedyalkova M.* Biomedical applications of iron oxide nanoparticles: Current insights, progress and perspectives // Pharmaceutics. 2022. V. 14. № 1. P. 204. https://doi.org/10.3390/pharmaceutics14010204
15. *Sutrisno J.*, *Purwanto A.*, *Mazlan S.A.* Recent progress on magnetorheological solids: Materials, fabrication, testing, and applications // Adv. Eng. Mater. 2015. V. 17. № 5. P. 563–597. https://doi.org/10.1002/adem.201400258
16. *Choi S.B.*, *Li W.*, *Yu M.*, *Du H.*, *Fu J.*, *Do P.X.* State of the art of control schemes for smart systems featuring magneto-rheological materials // Smart Mater. Struct. 2016. V. 25. № 4. P. 043001. https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/4/043001
17. *Filipcsei G.*, *Csetneki I.*, *Szilagyi A.*, *Zrinyi M.* Magnetic field-responsive smart polymer composites // Adv. Polym. Sci. 2007. V. 206. P. 137–189. https://doi.org/10.1007/12_2006_104
18. *Shamonin M.*, *Kramarenko E.Yu.* Highly responsive magnetoactive elastomers // Novel Magnetic Nanostructures. Amsterdam: Elsevier, 2018. P. 221–245. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813594-5.00007-2

19. *Gundermann T.*, *Cremer P.*, *Löwen H.*, *Menzel A.M.*, *Odenbach S.* Statistical analysis of magnetically soft particles in magnetorheological elastomers // Smart Mater. Struct. 2017. V. 26. № 4. P. 045012. https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa5f96

20. *Stepanov G.V.*, *Abramchuk S.S.*, *Grishin D.A.*, *Nikitin L.V.*, *Kramarenko E.Y.*, *Khokhlov A.R.* Effect of a homogeneous magnetic field on the viscoelastic behavior of magnetic elastomers // Polymer. 2007. V. 48. № 2. P. 488–495. https://doi.org/10.1016/j.polymer.2006.11.044

21. *Stoll A.*, *Mayer M.*, *Monkman G.J.*, *Shamonin M.* Evaluation of highly compliant magneto-active elastomers with colossal magnetorheological response // J. Appl. Polym. Sci. 2014. V. 131. № 2. P. 39793. https://doi.org/10.1002/app.39793

22. *Abramchuk S.S.*, *Grishin D.A.*, *Kramarenko E.Yu.*, *Stepanov G.V.*, *Khokhlov A.R.* Effect of a homogeneous magnetic field on the mechanical behavior of soft magnetic elastomers under compression // Polymer Science A. 2006. V. 48. № 2. P. 138–145. https://doi.org/10.1134/S0965545X06020064

23. *Stepanov G.V.*, *Kramarenko E.Y.*, *Semerenko D.A.* Magnetodeformational effect of the magnetoactive elastomer and its possible applications // J. Phys. Conf. Ser. 2013. V. 412. P. 012031. https://doi.org/10.1088/1742-6596/412/1/012031

24. *Galipeau E.*, *Ponte Castañeda P.* Giant field-induced strains in magnetoactive elastomer composites // Proc. Royal Soc. A. 2013. V. 469. № 2158. P. 20130385. https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0385

25. *Yu M.*, *Luo H.*, *Fu J.*, *Yang P.* The field-dependent conductivity of dimorphic magnetorheological gel incorporated with iron nanowire // J. Intelligent Mater. Syst. Struct. 2018. V. 29. № 1. P. 24–31. https://doi.org/10.1177/1045389X17733056

26. *Bica I.* Influence of the magnetic field on the electric conductivity of magnetorheological elastomers // J. Ind. Eng. Chem. 2010. V. 16. № 3. P. 359–363. https://doi.org/10.1016/j.jiec.2010.01.034

27. *Kostrov S.A.*, *Shamonin M.*, *Stepanov G.V.*, *Kramarenko E.Yu.* Magnetodielectric response of soft magnetoactive elastomers: effects of filler concentration and measurement frequency // Int. J. Molec. Sci. 2019. V. 20. № 9. P. 2230. https://doi.org/10.3390/ijms20092230

28. *Костров С.А.*, *Городов В.В.*, *Музафаров А.М.*, *Краменко Е.Ю.* Сравнительный анализ магнитореологического эффекта в мягких изотропных и анизотропных магнитоактивных эластомерах // Высокомолекулярные соединения. Серия Б. 2022. Т. 64. № 6. P. 471–480. https://doi.org/10.31857/S2308113922700231

29. *Chen L.*, *Gong X.L.*, *Li W.H.* Microstructures and viscoelastic properties of anisotropic magnetorheological elastomers // Smart Mater. Struct. 2007. V. 16. № 6. P. 2645. https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/6/069

30. *Khanouki M.A.*, *Sedaghati R.*, *Hemmatian M.* Experimental characterization and microscale modeling of isotropic and anisotropic magnetorheological elastomers // Composites. B. 2019. V. 176. P. 107311. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107311

31. *Jolly M.R.*, *Carlson J.D.*, *Munoz B.C.* model of the behaviour of magnetorheological materials // Smart Mater Struct. 1996. V. 5. P. 607.

32. *Ivaneyko D.*, *Toshchevikov V.*, *Saphiannikova M.* Dynamic-mechanical behaviour of anisotropic magneto-sensitive elastomers // Polymer. 2018. V. 147. P. 95–107. https://doi.org/10.1016/j.polymer.2018.04.057

33. *Borin D.*, *Stepanov G.*, *Bakhtiiarov A.*, *et al.* Magnetorheological effect of magnetoactive elastomer with a permalloy filler // Polymers. 2020. V. 12. № 10. P. 1–25. https://doi.org/10.3390/polym12102371

34. *Hoang N.*, *Zhang N.*, *Du H.* Adaptive tunable vibration absorber using a new magnetorheological elastomer for vehicular powertrain transient vibration reduction // Smart Materials and Structures. 2010. V. 20. № 1. P. 015019. https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/1/015019

35. *Gila-Vilchez C.*, *Bonhome-Espinosa A.*, *Kuzhir P.*, *Zubarev A.*, *Duran J.D.G.*, *et al.* Rheology of magnetic alginate hydrogels // J. Rheol. 2018. V. 62. № 5. P. 1083–1096. https://doi.org/10.1122/1.5028137

36. *Borin D.*, *Gunther D.*, *Hintze C.*, *Heinrich G.*, *Odenbach S.* The level of cross-linking and the structure of anisotropic magnetorheological elastomers // J. Magnetism and Magnetic Materials. 2012. V. 324. № 21. P. 3452–3454. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2012.02.063

37. *Zubarev A.Yu., et al.* Hysteresis of the magnetic properties of soft magnetic gels // Soft Matter. 2016. V. 12. № 30. P. 6473–6480. https://doi.org/10.1039/C6SM01257D

38. *See H.*, *Doi M.* Aggregation kinetics in electro-rheological fluids // J. Phys. Soc. Jpn. 1991. V. 60. P. 2778–2782. https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.2778

39. *Hill T.L.* Statistical mechanics: Principles and selected applications. Courier Corporatiopn. 2013.

40. *Landau L.D.*, *Lifshitz E.M.* Electrodynamics of continuous media. New York: Pergamon. 1960.

41. *Bozorth R.M.* Ferromagnetism. Wiley, New York. 1993.

42. *Rosensweig R.* Ferrohydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge. 1985.

43. *Pokrovskii V.N.* Statistical Mechanics of Dilute Suspensions. Moscow: Nauka. 1978.

44. *Krieger I.M.*, *Dougherty T.J.* A mechanism for non-newtonian flow in suspension of rigid spheres // Trans. Soc. Rheol. 1959. V. 3. № 1. P. 137–152. https://doi.org/10.1122/1.548848

45. *Barnes H.A.*, *Hutton J.F., Walters K.* An introduction to rheology. Amsterdam: Elsevier. 1989.

46. *Batchelor G.* The stress generated in a non-dilute suspension of elongated particles by pure straining motion // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. P. 813–29.

47. *Biller A.M.*, *Stolbov O.V.*, *Raikher Yu.L.* Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers // J.Applied Physics. 2014. V. 116. № 1. P. 114904. https://doi.org/10.1063/1.4895980

48. *Shouhu Xuan, Yangguang Xu, Taixiang Liu & Xinglong Gong.* Recent progress on the magnetorheological plastomers // International Journal of Smart and Nano Materials. 2015. V. 6. № 2. P. 135–148. https://doi.org/10.1080/19475411.2015.1062437

MICROSCOPIC MODELING OF MAGNETORHEOLOGICAL PROPERTIES IN MAGNETIC ELASTOMERS

A. Yu. Musikhin, A. Yu. Zubarev

This paper introduces a microscopic model explaining the magnetorheological properties of magnetic elastomers, which are composed of micron-sized magnetizable, without own magnetic moment, particles within a polymer. The study examines composites that are initially isotropic (made without a magnetic field) and anisotropic (polymerized under a magnetic field). Applying an external magnetic field to the composites causes internal anisotropic structures to form (or expand), leading to a notable increase in the material's shear modulus. The theoretical findings are in good agreement with experimental results.

Keywords: magnetoactive elastomers, shear modulus, magnetorheological effect

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Коэффициенты формы $\alpha(n)$, введенные в (26), равны [39]:

$$\alpha = \frac{1}{n\alpha_0'},$$

$$\beta = \frac{2\left(n^2-1\right)}{n\left(n^2\alpha_0+\beta_0\right)},$$

$$\zeta = \frac{4}{n\left(n^2+1\right)\beta_0'} - \frac{2}{n\alpha_0'},$$

$$\chi = \frac{2\alpha_0''}{n\alpha_0'\beta_0''} - \frac{8}{n\beta_0'\left(n^2+1\right)} + \frac{2}{n\alpha_0'},$$

$$\lambda_n = \frac{n^2-1}{n^2+1},$$

где

$$\alpha_0 = -\frac{1}{n^2-1}\left[\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1-2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\mathrm{m},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{n^2-1}\left[n - \frac{1}{2\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1+2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\mathrm{m},$$

$$\alpha_0' = \frac{1}{4\left(n^2-1\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[n\left(2rn^2-5\right) - \frac{3}{2\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1-2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\mathrm{m},$$

$$\beta_0' = \frac{1}{\left(n^2-1\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{n^2+2}{n} - \frac{3}{2\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1+2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\mathrm{m},$$

$$\alpha_0'' = \frac{1}{4\left(n^2-1\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[n\left(2n^2+1\right) - \frac{4n^2-1}{2\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1+2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\mathrm{m},$$

$$\beta_0'' = -\frac{1}{\left(n^2-1\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[3n + \frac{2n^2+1}{2\sqrt{n^2-1}}\ln\left(2n^2-1-2n\sqrt{n^2-1}\right)\right]\cdot$$