УДК 544.72.05:544.344.015.22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЯНУС-ЧАСТИЦ И ОБОБЩЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ПЛАТО О СТАНДАРТНОМ ДВОЙНОМ ПУЗЫРЕ

© 2025 г. В. Б. Федосеев

Институт металлоорганической химии имени Г.А. Разуваева Российской академии наук, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Тропинина, 49. Россия

**e-mail: vbfedoseev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.07.2025 г.
После доработки 29.08.2025 г.
Принята к публикации 29.08.2025 г.

Янус-частицы являются одной из форм существования гетерогенных микро- и наночастиц. Удобным математическим прототипом янус-частиц является двойной пузырь, описанный Плато при решении проблемы о минимальных поверхностях. Основное различие между двойным пузырём и янус-частицей заключается в дополнительном условии, что межфазные границы могут иметь разные упругие свойства. Решение для этого случая получено с использованием метода Юнга. Указаны пределы его существования. Продемонстрирована зависимость конфигурации янус-частиц от соотношения поверхностных свойств и образующих их объёмов.

Ключевые слова: янус-частицы, стандартный двойной пузырь, поверхностные силы, механическое равновесие

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF JANUS PARTICLES AND A GENERALIZATION OF THE PLATEAU HYPOTHESIS OF THE STANDARD DOUBLE BUBBLE

© 2025 г. V. B. Fedoseev

Janus particles are one of the forms of existence of heterogeneous micro- and nanoparticles. The bifunctionality of their properties is of great practical interest. A convenient mathematical prototype of Janus particles is the double bubble described by Plateau when solving the problem of minimal surfaces. The main difference between a double bubble and a Janus particle is the additional condition that the interphase boundaries can have different elastic properties. The solution for this case is obtained using Young's method. The limits of its existence are indicated. The dependence of the configuration of Janus particles on the ratio of surface properties and the volumes that form them is demonstrated.

Keywords: Janus particles, standard double bubble, surface forces, mechanical equilibrium

ВВЕДЕНИЕ

Частицы с морфологией типа янус отличаются большим разнообразием и имеют множество практических приложений в разных отраслях техники (химический катализ, функциональные материалы, медицина) [1, 2]. Янус-частицами принято называть класс частиц с гетерогенной структурой, которая может возникать при расслаивании, плавлении, испарении гомогенных смесей, коагуляции (сплавлении или спекании) частиц разного состава. Их поверхность на противоположных сторонах имеет разные химический состав и морфологию, которые определяют физические и химические свойства [3] и бифункциональность подобных частиц. Термодинамическое описание свойств янус-частиц основано на моделировании фазовых превращений в наночастицах [4–6]. Важнейшим результатом такого описания является демонстрация влияния формы и размера микро- и наночастиц на диаграммы фазовых превращений.

Математическим прототипом янус-частиц является двойной пузырь, рассмотренный Плато [7] при решении проблемы поверхностей с минимальной площадью при заданных ограничениях объёма или периметра. Только в начале XXI века математики строго доказали, что описанный Плато объект является единственной конфигурацией из двух пузырей заданных объемов, минимизирующей площадь их поверхности [8–10]. Это состояние было определено математиками как "стандартный двойной пузырь". Кроме него описано и неустойчивое (метастабильное) состояние, имеющее вид пузыря, перетянутого по экватору тороидальным пузырём [9]. Это метастабильное состояние, его можно рассматривать как прототип другого реального объекта – манжеты, образованной жидкостью между двумя сферическими частицами [11]. Согласно Плато образующие двойной пузырь три сферические поверхности сходятся под углом 120°. Это строго доказано для случая 3D-пространства в [10, 12] и имеет обобщение для пространств более высокой размерности [13, 14]. В монографии Плато рассмотрены и другие интересные

конфигурации, такие как кластеры из нескольких пузырей и плёнки, образующиеся на проволочных каркасах.

Несомненно, строгие доказательства теорем о минимальных свойствах двойного пузыря имеют большое значение. Однако работы математиков практически не упоминаются при решении конкретных задач, возникающих в физике и материаловедении. По умолчанию используется утверждение, что поверхностная энергия прямо пропорциональна площади поверхности, поэтому минимизация площади и минимизация энергии границ являются тождественными способами решения проблемы [8].

Янус-частицы отличаются от двойного пузыря тем, что образованы разными фазами, поэтому их границы могут иметь разные поверхностные свойства. В этом случае задачу минимизации энергии решают на основе метода Юнга [15]. Это позволяет описывать краевые углы для разных конфигураций, например для контакта жидкости с твёрдыми сферическими выпуклыми и вогнутыми поверхностями [16], между двумя твёрдыми сферами [11] и другие. Одним из результатов обобщения метода Юнга является "треугольник Неймана", описывающий линию трехфазного контакта, в том числе для янус-конфигурации [17, 18]. Предложенный в [19] подход позволяет вычислять контактные углы с учётом объёма фаз и формы поверхностей, образующих янус-частицу. Это позволяет определить все необходимые для геометрических построений радиусы и углы, упрощающие моделирование физико-химических характеристик янус-частиц.

При термодинамическом моделировании чаще всего ограничиваются рассмотрением янус-частиц со сферической конфигурацией и плоской межфазной границей [4, 5, 20–22]. В какой-то степени это приближение можно оправдать малостью вклада поверхностной энергии в полную энергию частицы. Однако корректность такого

упрощения уменьшается с ростом доли поверхностной энергии. Поэтому для микро- и наночастиц возникает необходимость обоснования применимости подобных упрощений.

Целью работы является модификация модели янус-частиц [19] в виде полной системы уравнений, удобной для геометрических построений и термодинамических расчётов, а также оценка корректности использования простых (сферическая форма, плоская межфазная граница) конфигураций янус-частиц.

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ЯНУС-ЧАСТИЦ

Янус-частицу представим в виде трёх шаровых сегментов, имеющих единое основание, ограниченное линией трехфазного контакта (Рис. 1). Пусть для определённости левая часть частицы (сегмент L на Рис. 1) заполнена фазой α, а правая (сегмент R на Рис. 1) фазой β. "Левый" L и "правый" R шаровые сегменты образуют внешние границы частицы, а сегмент G межфазную границу.

Рис. 1. Аксиальное сечение янус-частицы (а) и схема приложения поверхностных сил к линии трехфазного контакта (б).

Сегменты *L*, *R*, *G* имеют общее основание, поэтому радиусы r_{L}, r_{R}, r_{G} и углы ϕ_{L}, ϕ_{R}, ϕ_{G} связаны соотношениями $r_{\mathrm{L}}\sin\phi_{\mathrm{L}} = r_{\mathrm{R}}\sin\phi_{\mathrm{R}} = r_{\mathrm{G}}\sin\phi_{\mathrm{G}}$.

$$r_{\mathrm{R}} = r_{\mathrm{L}}\frac{\sin\phi_{\mathrm{L}}}{\sin\phi_{\mathrm{R}}}, \quad r_{\mathrm{G}} = r_{\mathrm{L}}\frac{\sin\phi_{\mathrm{L}}}{\sin\phi_{\mathrm{G}}}. \tag{1}$$

В свою очередь, радиус r_{L} можно определить, если определён полный объём частицы V.

$$V = V_{\mathrm{L}} + V_{\mathrm{R}} = V_{\alpha} + V_{\beta},$$
$$V_{\mathrm{f}} = \begin{cases} V_{\mathrm{L}} \mp V_{\mathrm{G}}, & f = \alpha, \\ V_{\mathrm{R}} \pm V_{\mathrm{G}}, & f = \beta \end{cases} \tag{2}$$

где V_{L}, V_{R}, V_{G} – объёмы шаровых сегментов, V_{f} – объёмы сосуществующих фаз, здесь $f = \alpha, \beta$. Выбор знака определён направлением вершины сегмента G. Если вершина направлена влево, сегмент G увеличивает объём фазы β (как на Рис. 1), если вправо, увеличивает объём фазы α.

Подстановка объёма шаровых сегментов в (2) даёт

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{1}{3}\pi r_{\mathrm{L}}^3 \left(\left(1 - \cos\phi_{\mathrm{L}}\right)^2 \left(2 + \cos\phi_{\mathrm{L}}\right) + \left(\frac{\sin\phi_{\mathrm{L}}}{\sin\phi_{\mathrm{R}}}\right)^3 \left(1 - \cos\phi_{\mathrm{R}}\right)^2 \left(2 + \cos\phi_{\mathrm{R}}\right) \right),$$
$$V_{\mathrm{f}} = \frac{1}{3}\pi r_{\mathrm{L}}^3 \left(\left(\frac{\sin\phi_{\mathrm{L}}}{\sin\phi_{\mathrm{R}}}\right)^3 \left(1 - \cos\phi_{\mathrm{R}}\right)^2 \left(2 + \cos\phi_{\mathrm{R}}\right) \pm \left(\frac{\sin\phi_{\mathrm{L}}}{\sin\phi_{\mathrm{G}}}\right)^3 \left(1 - \cos\phi_{\mathrm{G}}\right)^2 \left(2 + \cos\phi_{\mathrm{G}}\right) \right), \tag{3}$$

где r_0 – радиус эквивалентной по объёму сферы. Уравнения (3) позволяют выразить все радиусы сегментов через r_0.

Уравнения (1) и (3) понижают число независимых переменных до трёх (ϕ_{L}, ϕ_{R}, ϕ_{G}). Далее для удобства примем $r_0 = 1$ и выразим объёмы фаз через объёмную долю $q = V_{\beta} / V$.

Для описания изменений формы при вариации объёма сосуществующих фаз воспользуемся подходом Юнга. На линии трехфазного контакта действуют силы поверхностного натяжения $\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{G}}$ (Рис. 1б), которые стягивают поверхности соответствующих сегментов и площадь их общего основания. Условие компенсации поверхностных сил в проекциях на плоскость основания сегментов и нормальное к ней аксиальное сечение имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{L}} \cos\phi_{\mathrm{L}} + \sigma_{\mathrm{R}} \cos\phi_{\mathrm{R}} + \sigma_{\mathrm{G}} \cos\phi_{\mathrm{G}} = 0,$$
$$\sigma_{\mathrm{L}} \sin\phi_{\mathrm{L}} + \sigma_{\mathrm{R}} \sin\phi_{\mathrm{R}} + \sigma_{\mathrm{G}} \sin\phi_{\mathrm{G}} = 0, \tag{4}$$

здесь σ – поверхностное натяжение соответствующей межфазной границы.

Используя тригонометрические тождества $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$ и $(\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1$, получим

$$\cos(\phi_L - \phi_G) = \frac{\sigma_R^2 - \sigma_L^2 - \sigma_G^2}{2\sigma_L \sigma_R},$$
$$\cos(\phi_L - \phi_R) = \frac{\sigma_G^2 - \sigma_L^2 - \sigma_R^2}{2\sigma_L \sigma_R}. \tag{5}$$

Это позволяет описать связь между углами ϕ_L, ϕ_F, ϕ_G, краевыми углами φ_{LR}, φ_{LG}, φ_{RG} и поверхностными свойствами в виде

$$|\phi_L - \phi_G| = \varphi_{LG} = \arccos\left(\frac{\sigma_R^2 - \sigma_G^2 - \sigma_L^2}{2\sigma_L \sigma_G}\right),$$
$$|\phi_L - \phi_R| = \varphi_{LR} = \arccos\left(\frac{\sigma_G^2 - \sigma_L^2 - \sigma_R^2}{2\sigma_L \sigma_R}\right),$$
$$|\phi_R - \phi_G| = \varphi_{RG} = \arccos\left(\frac{\sigma_L^2 - \sigma_G^2 - \sigma_R^2}{2\sigma_G \sigma_R}\right), \tag{6}$$
$$\varphi_{RG} + \varphi_{RG} + \varphi_{RG} = 2\pi.$$

Внешние границы янус-частицы выпуклые, поэтому имеют смысл решения с противоположными знаками углов ϕ_L и ϕ_R. В соответствии с приведённой на Рис. 1б схемой $\phi_L > 0$, $-\pi < \phi_R < 0$ и $\phi_R < \phi_G < \phi_L$. При этом для сегментов, расположенных вершиной вправо, углы имеют отрицательное значение. Ориентация сегмента G зависит от объёмной доли q.

Область существования решения уравнений (6) определена условием $|\sigma_L - \sigma_R| < \sigma_G < \sigma_L + \sigma_R$, которое по физическому смыслу определяет состояния неполного смачивания. Внутри этого интервала следует ожидать возникновения янус-частиц и им подобных структур. За его пределами необходимо рассматривать либо конфигурации типа ядро–оболочка (core–shell), либо не слипающиеся пузыри и капли.

Уравнения (1)–(4) сводят описание формы янус-частицы к единственной независимой переменной, в качестве которой можно выбрать угол ϕ_L или объёмную долю одной из фаз q. Объём частиц и поверхностные свойства являются параметрами модели.

Если объёмы пузырей являются функциями внешних условий (T, P) можно воспользоваться полученными на основе уравнений Лапласа соотношениями $\frac{\sigma_R}{r_R} - \frac{\sigma_L}{r_L} = \frac{\sigma_G}{r_G}$ [23].

Из соотношений (5) и (6) легко получить правило треугольника Неймана

$$\frac{\sin\varphi_{LR}}{\sigma_G} = \frac{\sin\varphi_{LG}}{\sigma_R} = \frac{\sin\varphi_{RG}}{\sigma_L}.$$

Оно удобно при описании тройных стыков границ [18, 24] в поликристаллах, концентрированных эмульсиях и пенах. Уравнения (6) дополняют треугольник Неймана учётом того, что в янус-частицах тройной стык образован сферическими границами (1)–(3).

Согласно уравнениям (1)–(6) углы, радиусы, объёмы сегментов являются функциями одной независимой переменной, в качестве которой проще выбрать один из углов (далее использован угол ϕ_L). Привязка всех величин к единому основанию, ограниченному линией трехфазного контакта, упрощает построение модели янус-частиц.

Рассмотрим некоторые характерные варианты янус-конфигурации, демонстрирующие закономерности, связывающие форму с поверхностными свойствами контактирующих фаз.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ЯНУС-ЧАСТИЦ

Сначала воспроизведём наиболее исследованную конфигурацию.

Стандартный двойной пузырь

Случай стандартного двойного пузыря достаточно детально исследован в работах [8, 10, 14]. В настоящей работе описание дополнено условием сохранения объёма $r_0 = 1$ и более удобными для моделирования аналитическими выражениями (6).

Состояния с равными поверхностными натяжениями $\sigma_G = \sigma_L = \sigma_R$ возникают при контакте капель эмульсии или мыльных пузырей. В этом случае

$$\frac{\sigma_G^2 - \sigma_L^2 - \sigma_R^2}{2\sigma_L\sigma_R} = \frac{\sigma_R^2 - \sigma_L^2 - \sigma_G^2}{2\sigma_L\sigma_G} = \frac{\sigma_L^2 - \sigma_R^2 - \sigma_G^2}{2\sigma_R\sigma_G} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, все контактные углы φ_{LR}, φ_{LG}, φ_{RG} равны $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ или 120°, как утверждают гипотеза Плато [7] и теорема Тейлора [10].

На Рис. 2 приведены состояния с разными q, воспроизводящие конфигурации, описанные Плато [7, Figs. 62–64].

Рис. 2. **Изменение конфигурации стандартного двойного пузыря с увеличением объёмной доли** q.

В случае $\phi_L = \pi 2/3$ образуется симметричная частица с равными объёмами фаз и плоской межфазной границей ($\phi_R = -\phi_L$, $\phi_G = 0$ и $q = 0.5$).

Теперь рассмотрим частицы, границы которых имеют разное поверхностное натяжение. В первую очередь рассмотрим конфигурации, возникающие на границе области существования решения (6).

Идеальное смачивание

Предельный случай $\sigma_G = |\sigma_L - \sigma_R|$ соответствует условию идеального смачивания. В соответствии с (6) $\phi_R = \phi_L - \pi$, силы $\mathbf{F}_L$ и $\mathbf{F}_R$, имеют противоположное направление, а согласно (1) сегменты L и R имеют одинаковый радиус. Это состояние соответствует переходу от янус-конфигурации к структуре ядро–оболочка.

На Рис. 3 показано близкое к предельному состояние $\sigma_G = 1.001|\sigma_L - \sigma_R|$. При этом янус-конфигурация сохраняет устойчивость, и слой фазы α не полностью покрывает поверхность фазы β. Такая янус-частица имеет практически сферическую форму. Так как в приведённом случае $\sigma_R > \sigma_L$, фаза β находится внутри фазы α почти полностью.

Рис. 3. Форма янус-частиц на границах области существования решения (6). Слева – состояния, близкие к идеальному смачиванию, справа – близкие к абсолютному несмачиванию.

Отсутствие смачивания

Другой предельный случай $\sigma_G = \sigma_L + \sigma_R$ соответствует состоянию абсолютного несмачивания, при этом $\varphi_{LR} = \arccos\left(\dfrac{\sigma_G^2 - \sigma_L^2 - \sigma_R^2}{2\sigma_L\sigma_R}\right) = 0$ и $\phi_R = \phi_L$. Когда поверхностное натяжение внутренней границы превышает поверхностное натяжение внешних границ, фазы стремятся уменьшить площадь контакта. На Рис. 3 показаны близкие к этому пределу состояния.

Приближение к границам области существования уменьшает до нуля поверхность сегмента R при $\sigma_G \cong |\sigma_L - \sigma_R|$, а при $\sigma_G \cong \sigma_L + \sigma_R$ межфазной границы и общего

основания сегментов. Для этих состояний незначительное изменение угла ϕ_L приводит к существенному изменению объёмной доли соприкасающихся фаз.

Симметричная линзообразная фаза

Несложно описать случай, когда одна из фаз имеет вид симметричной линзы. Фаза β имеет такой вид при $\phi_R = -\phi_G$ а фаза α при $\phi_L = -\phi_G$. В соответствии с (5)–(6) эти состояния возникают при условии $\phi_L = \varphi_{LG} + \frac{1}{2}\varphi_{RG}$ или $\phi_L = \frac{1}{2}\varphi_{LG}$. Объёмная доля симметричной линзы зависит от соотношения поверхностного натяжения границ и может меняться в интервале $0 < q < 1$.

Пример подобных состояний фазы β приведён на Рис. 4.

Рис. 4. Янус-частицы с симметричной β фазой.

Симметричные конфигурации для каждой из фаз α или β реализуются при единственном значении q. Они неустойчивы и нарушаются при изменении q или поверхностного натяжения любой из границ.

К этим уникальным конфигурациям можно добавить состояния с плоской межфазной границей $\phi_G = 0$, которые реализуются при $\phi_L = \varphi_{LG} = \arccos\left(\frac{\sigma_R^2 - \sigma_G^2 - \sigma_L^2}{2\sigma_L\sigma_G}\right)$. Состояния, при которых внешняя граница одной из фаз янус-частицы имеет вид полусферы ($\phi_L = \pi/2$ либо $\phi_R = -\pi/2$), тоже реализуются в единственной точке и нарушаются при любом изменении q либо поверхностного натяжения одной из границ. Тем не менее, именно подобные нестабильные состояния часто выбираются при моделировании или изображении янус-частиц.

Общий случай

На Рис. 5 показана эволюция янус-частицы с ростом объёмной доли фазы β. Подобные процессы наблюдаются экспериментально, когда внутри капель протекают фазовые или химические превращения [25, 26].

Рис. 5. Изменение янус-конфигурации с увеличением объёмной доли q при

$$\sigma_L : \sigma_R : \sigma_G = 1 : 0.75 : 0.5 .$$

В экспериментах фиксируются практически все представленные на Рис. 2–5 конфигурации. В неравновесных условиях янус-частицы могут принимать более сложные формы. Этому способствуют разные скорости роста и растворения или упруго-пластические свойства контактирующих фаз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (1)–(6) описывают все характеристики янус-структуры: радиусы и углы шаровых сегментов, образующих янус-частицы, краевые углы, объём сегментов и соприкасающихся фаз. Эти параметры позволяют при необходимости вычислить площадь межфазных границ и длину линии трехфазного контакта. В отличие от метода треугольника Неймана они содержат более полный набор величин, необходимый для геометрических построений и расчётов.

Уравнения (6) и модели янус-частиц, построенные на их основе (Рис. 2–5), позволяют утверждать, что форма янус-частиц в общем случае отличается от сферической (правый и левый сегменты имеют разную кривизну) и непрерывно меняется при перераспределении объёма между её частями.

Если поверхностные свойства границ (σ) являются константами, то форма янус-частиц не зависит от объёма. Однако при детальном рассмотрении задач образования янус-частиц, например, в результате расслаивания реальных растворов следует учитывать концентрационные и размерные эффекты.

Так учёт внутреннего (Лапласовское) давления может изменить объёмную долю фаз q, но не краевые углы. Лапласовское давление может изменять краевые углы только в том случае, когда оно влияет на поверхностное натяжение межфазных границ [27].

Другой эффект связан с поверхностной активностью компонентов смеси, когда концентрация влияет на поверхностное натяжение. Особенно это важно для наночастиц, у которых размер влияет на состав сосуществующих фаз [28], и, соответственно, на поверхностное натяжение межфазных границ и конфигурацию янус-частиц. Концентрационный эффект дополняет зависимость поверхностного натяжения от размера наночастиц, которая описана в пионерской работе Толмена [29].

Зависимость поверхностных свойств границ от размера и состава частицы способна порождать необычные явления. Примером являются осцилляции формы контактирующих фаз при изменении поверхностных свойств межфазных границ [30]. Подобные осцилляции, в частности, наблюдались нами в микронных гетерогенных каплях разного химического состава [31, 32], когда концентрация электролита меняется при испарении или конденсации растворителя. Это влияет как на локальное давление пара, размер капли и кристалла, так и на поверхностное натяжение участвующих в фазовом превращении межфазных границ.

При моделировании наночастиц необходимо учитывать конфигурацию более точно, так как доля поверхностной энергии в полной энергии образования велика. Используемые для описания янус-частиц термодинамические модели, ограничивающиеся сферическими конфигурациями либо плоской межфазной границей [4, 5, 20–22], внесли

важный вклад в понимание природы размерных эффектов при фазовых превращениях. На основе приведённого рассмотрения можно оценить корректность выбора этих простых моделей:

а) модели янус-частиц с плоской межфазной границей корректны при углах $\phi_G \approx 0$ или $\phi_L \approx \arccos\left(\frac{\sigma_R^2 - \sigma_G^2 - \sigma_L^2}{2\sigma_L\sigma_G}\right)$;

б) приближение со сферической формой янус-частиц приемлемо в условиях хорошего смачивания $\sigma_G \approx |\sigma_L - \sigma_R|$. Причём в этих же условиях возможна конкуренция и сосуществование наночастиц с core–shell и янус состояниями.

Размерные и концентрационные эффекты усложняют моделирование, но их учёт необходим для понимания закономерностей формирования морфологии янус-частиц.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института ИМХ РАН.

СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

В данной работе отсутствуют исследования человека или животных.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marschelke C., Fery A., Synytska A*. Janus particles: from concepts to environmentally friendly materials and sustainable applications // Colloid Polym. Sci. 2020. V. 298. № 7. P. 841–865.
https://doi.org/10.1007/s00396-020-04601-y

2. *Хлебцов Б.Н.* Функциональные наночастицы: синтез и практические применения // Коллоид. журн. 2023. Т. 85. № 4. P. 399–402. https://doi.org/10.31857/s0023291223600426 [*Khlebtsov, B. N.* Functional nanoparticles: Synthesis and practical applications // Colloid Journal. 2023. V. 85. № 4. P. 475–478.
https://doi.org/10.1134/s1061933x2360046x]

3. *Лернер М.И., Бакина О. В., Казанцев С. О. и др.* Бикомпонентные серебросодержащие наночастицы: связь морфологии и электрокинетического потенциала // Коллоид. журн. 2023. Т. 85. № 4. P. 443–452. https://doi.org/10.31857/s002329122360030x *[Lerner M.I., Bakina O.V., Kazantsev S.O. et al.* Silver-containing bicomponent nanoparticles: Relationship between morphology and electrokinetic potential // Colloid Journal. 2023. V. 85. № 4. P. 520–530.
https://doi.org/10.1134/s1061933x23600422]

4. *Guisbiers G., Khanal S., Ruiz-Zepeda F. et al*. Cu–Ni nano-alloy: Mixed, core–shell or Janus nano-particle? // Nanoscale. 2014. V. 6. № 24. P. 14630–14635.
https://doi.org/10.1039/c4nr05739b

5. *Taranovskyy A., Tomán J. J., Gajdics B. D., Erdélyi Z.* 3D phase diagrams and the thermal stability of two-component Janus nanoparticles: effects of size, average composition and temperature // Phys. Chem. Chem. Phys. 2021. V. 23. № 10. P. 6116–6127.
https://doi.org/10.1039/d0cp06695h

6. *Wautelet M., Shirinyan A.S.* Phase transitions in binary alloys: nanoparticles and

nanowires // Arch. Metall. Mater. 2006. V. 51. № 4. P. 539–545.

7. Plateau J. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires // Gauthier-Villars, Paris. 1873.

8. *Hutchings M., Morgan M., Ritore F.* Proof of the double bubble conjecture // Ann. Math. 2002. V. 155. № 2. P. 459–489.
https://doi.org/10.2307/3062123

9. *Hutchings M., Morgan F., Ritoré M., Ros A.* Proof of the double bubble conjecture // Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. 2000. V. 6. № 6. P. 45–49.
https://doi.org/10.1090/S1079-6762-00-00079-2

10. *Taylor J.E.* The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surface // Ann. Math. 1976. V. 103. № 3. P. 489–539.
https://doi.org/10.2307/1970949

11. *Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Кульпин Д.А. и др.* Исследование проблемы термодинамической устойчивости манжета жидкости между двумя сферическими наночастицами // Конденсированные среды и межфазные границы. 2011. V. 13. № 2. P. 196–202.

12. *Lawlor G.R.* Double bubbles for immiscible fluids in R^n // J. Geom. Anal. 2014. V. 24. № 1. P. 190–204.
https://doi.org/10.1007/s12220-012-9333-1

13. *Bongiovanni E., Di Giosia L., Diaz A. et al.* Double bubbles on the real line with log-convex density // Anal. Geom. Metr. Spaces. 2018. V. 6. № 1. P. 64–88.
https://doi.org/10.1515/agms-2018-0004

14. *Фоменко А.Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях // Математический сборник. 1972. Т. 89(131). № 3(11). С. 475–519.
Fomenko A.T. The multidimensional Plateau problem in Riemannian manifolds // Math. USSR-

Sb. 1972. V. 18: № 3. P. 487–527.
https://doi.org/10.1070/SM1972v018n03ABEH001839

15. *Young T*. III. An essay on the cohesion of fluids // Philos. Trans. R. Soc. London. 1805. V. 95. № 95. P. 65–87.
https://doi.org/10.1098/rstl.1805.0005

16. *Jasper W.J., Anand N*. A generalized variational approach for predicting contact angles of sessile nano-droplets on both flat and curved surfaces // J. Mol. Liq. 2019. V. 281. P. 196–203.
https://doi.org/10.1016/j.molliq.2019.02.039

17. *Rickayzen G.* Molecular theory of capillarity // Phys. Bull. 1983. V. 34. № 10. P. 437–438.

18. *Virgilio N., Desjardins P., L'Espérance G., Favis B.D.* In situ measure of interfacial tensions in ternary and quaternary immiscible polymer blends demonstrating partial wetting // Macromolecules. 2009. V. 42. № 19. P. 7518–7529.
https://doi.org/10.1021/ma9005507

19. *Федосеев В.Б*. Равновесная конфигурация янус-частиц при условии компенсации сил поверхностного натяжения // Письма в журнал технической физики. 2025. V. 51. № 11. P. 22–25.
https://doi.org/10.61011/PJTF.2025.11.60483.20293

20. *Bouar Y. Le, Onera C*. An introduction to the stability of nanoparticles // Mech. nano-objects. Les Presses de l'École des Mines de Paris. Paris. 2011. P. 1–27.

21. *Shirinyan A.S.* Two-phase equilibrium states in individual Cu–Ni nanoparticles: size, depletion and hysteresis effects // Beilstein J. Nanotechnol. 2015. V. 6. P. 1811–1820.
https://doi.org/10.3762/bjnano.6.185

22. *Pankaj P., Bhattacharyya S., Chatterjee S*. Competition of core–shell and Janus

morphology in bimetallic nanoparticles: Insights from a phase-field model // Acta Mater. 2022. V. 233. P. 117933.
https://doi.org/10.1016/j.actamat.2022.117933

23 *Guzowski J., Korczyk P.M., Jakiela S., Garstecki P.* The structure and stability of multiple micro-droplets // Soft Matter. 2012. V. 8. № 27. P. 7269–7278.
https://doi.org/10.1039/c2sm25838b

24. *Torza S., Mason S.G*. Three-phase interactions in shear and electrical fields // J. Colloid Interface Sci. 1970. V. 33. № 1. P. 67–83.
https://doi.org/10.1016/0021-9797(70)90073-1

25. *Nisisako T*. Recent advances in microfluidic production of Janus droplets and particles // Curr. Opin. Colloid Interface Sci. 2016. V. 25. P. 1–12.
https://doi.org/10.1016/j.cocis.2016.05.003

26. *Zhang Q., Xu M., Liu X.et al*. Fabrication of Janus droplets by evaporation driven liquid-liquid phase separation // Chem. Commun. 2016. V. 52. № 28. P. 5015–5018.
https://doi.org/10.1039/c6cc00249h

27. *Rekhviashvili S.S., Kishtikova E. V*. On the size dependence of a contact angle // Prot. Met. Phys. Chem. Surfaces. 2012. V. 48. P. 402–405.
https://doi.org/10.1134/S2070205112040156

28. *Шишулин А.В., Федосеев В.Б*. Размерный эффект при расслаивании твердого раствора Cr-W // Неорганические Материалы. 2018. V. 54. № 6. P. 574–578.
https://doi.org/10.7868/s0002337x18060040 [*Shishulin, A.V.*, *Fedoseev V.B.* Size effect in the phase separation of Cr–W solid solutions // Inorganic Materials. 2018. V. 54. №. 6. P. 546–549.
https://doi.org/10.1134/S0020168518050114]

29. *Tolman R.C*. The effect of droplet size on surface tension // J. Chem. Phys. 1949. V. 17. № 3. P. 333–337.

https://doi.org/10.1063/1.1747247

30. *Nikolov A., Wasan D*. Oil lenses on the air–water surface and the validity of Neumann's rule // Adv. Colloid Interface Sci. 2017. V. 244. P. 174–183. https://doi.org/10.1016/j.cis.2016.05.003

31. *Федосеев В.Б., Максимов М.В*. Осциллирующие фазовые превращения раствор–кристалл–раствор в системе состава KCl–NaCl–H_2O // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. № 6. С. 424–427. https://doi.org/10.7868/S0370274X15060065 [*Fedoseev V.B., Maksimov M.V.* Solution-crystal-solution oscillatory phase transitions in the KCl-NaCl-H2O system // JETP Letters. 2015. V. 101. № 6. P. 390–393. https://doi.org/10.1134/S0021364015060053]

32. *Федосеев В.Б*. Осциллирующие фазовые переходы раствор–газ и раствор–кристалл в каплях растворов с одним кристаллизующимся компонентом // Нелинейная динамика. 2017. V. 13. № 2. P. 195–206. https://doi.org/10.20537/nd1702004

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Аксиальное сечение янус-частицы (а) и схема приложения поверхностных сил к линии трехфазного контакта (б).

Рис. 2. Изменение конфигурации стандартного двойного пузыря с увеличением объёмной доли q.

Рис. 3. Форма янус-частиц на границах области существования решения (6). Слева – состояния, близкие к идеальному смачиванию, справа – близкие к абсолютному несмачиванию.

Рис. 4. Янус-частицы с симметричной β фазой.

Рис. 5. Изменение янус-конфигурации с увеличением объёмной доли q при $\sigma_L : \sigma_R : \sigma_G = 1 : 0.75 : 0.5$.

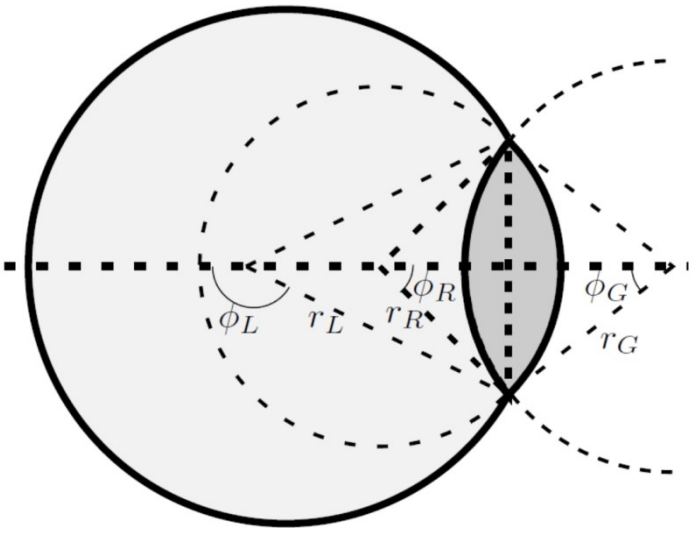

Рисунок 1а. Федосеев В.Б.

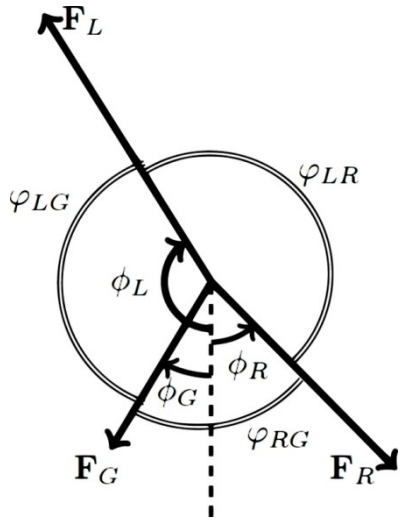

Рисунок 1б. Федосеев В.Б.

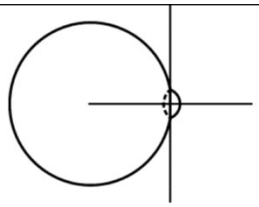	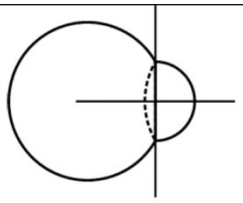	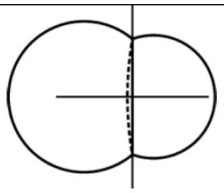	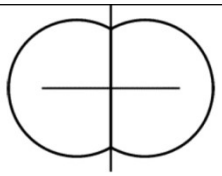
$\varphi_L = 170^\circ$ 。 $q \cong 0$ $r_L \cong 1$ $r_R = 0.18$	$\varphi_L = 150^\circ$ $q = 0.07$ $r_L = 0.95$ $r_R = 0.49$	$\varphi_L = 130^\circ$ $q = 0.32$ $r_L = 0.91$ $r_R = 0.74$	$\varphi_L = 120^\circ$ $q = 0.5$ $r_L = 0.84$ $r_R = 0.84$

Рисунок 2. Федосеев В.Б.

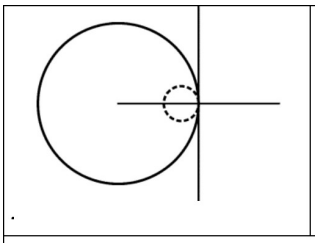	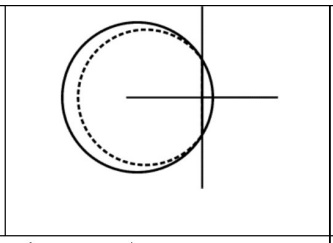	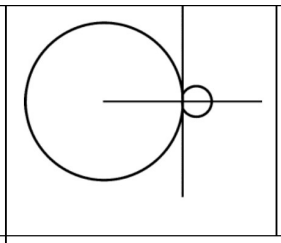	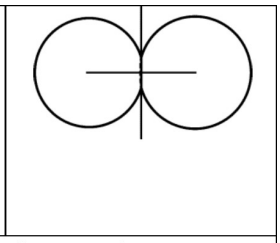
$\sigma_G = 1.001 \lvert \sigma_L - \sigma_R \rvert$		$\sigma_G = 0.97 \left(\sigma_L + \sigma_R \right)$	
$\varphi_L = 179^\circ$ $q \cong 0$ $r_L = 1$ $r_R = 0.36$	$\varphi_L = 150^\circ$ $q = 0.74$ $r_L = 1$ $r_R = 0.95$	$\varphi_L = 175^\circ$ $q = 0.01$ $r_L = 1$ $r_R = 0.19$	$\varphi_L = 164^\circ$ $q = 0.5$ $r_L = 0.79$ $r_R = 0.79$

Рисунок 3. Федосеев В.Б.

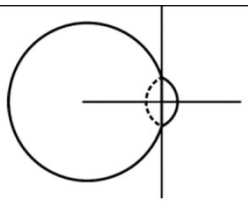	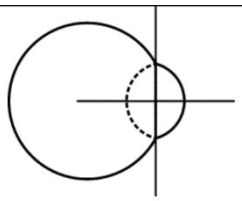	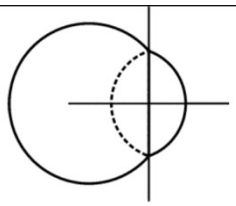	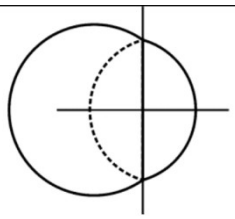
$\varphi_L = 62^\circ$ $q = 0.02$ $r_L = 1$ $r_R = 0.34$	$\varphi_L = 152^\circ$ $q = 0.07$ $r_L = 0.99$ $r_R = 0.49$	$\varphi_L = 139^\circ$ $q = 0.17$ $r_L = 0.99$ $r_R = 0.69$	$\varphi_L = 125^\circ$ $q = 0.35$ $r_L = 0.98$ $r_R = 0.83$

Рисунок 4. Федосеев В.Б.

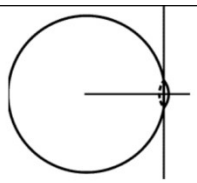	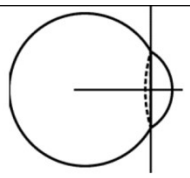	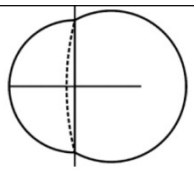	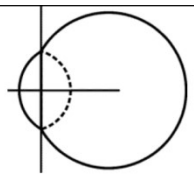	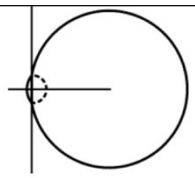
$\varphi_L = 170^\circ$ $q \cong 0$ $r_L = 1$ $r_R = 0.28$	$\varphi_L = 150^\circ$ $q = 0.07$ $r_L = 0.98$ $r_R = 0.58$	$\varphi_L = 90^\circ$ $q = 0.74$ $r_L = 0.83$ $r_R = 0.95$	$\varphi_L = 30^\circ$ $q = 0.96$ $r_L = 0.58$ $r_R = 0.99$	$\varphi_L = 10^\circ$ $q \cong 1$ $r_L = 0.28$ $r_R = 1$

Рисунок 5. Федосеев В.Б.