DOI: 10.31857/S0023291226050118
УДК 532.6
Оригинальная статья / Original Article

Об электродиспергировании жидкости с мениска на торце капилляра: отрыв капли–распад выбрасываемой струи

С.О. Ширяева, А.И. Григорьев*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Российская Федерация
**E-mail: grigorai@mail.ru*

Аннотация. Определено место в общей феноменологической классификации режимов электрогидродиспергирования малоисследованного режима «ветвящихся струй». Выяснилось, что режим «ветвящихся струй» реализуется только для весьма больших безразмерных вязкостей жидкости (в области перехода от безразмерной очень вязкой жидкости к безразмерной вязкоупругой жидкости), высоких электропроводностей жидкости, с нарушением осесимметричности струи на финальной стадии явления. Напряженность электростатического поля в окрестности дочерних струй при реализации режима «ветвящихся струй» находится на пороге зажигания в окружающей газовой среде коронного разряда. Показано, что режим «ветвящихся струй» и «веерный» режимы диспергирования различаются прикладываемым к разрядному промежутку напряжением и вязкостью диспергируемой жидкости.

Ключевые слова: струя, капля, осесимметричные режимы электростатического диспергирования жидкости, безразмерная вязкость, электропроводность

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Ярославского государственного университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, у них нет конфликта интересов.

Вклад авторов в публикацию. Концепция исследования – ШСО, ГАИ; анализ данных литературы и экспериментальных данных – ШСО, ГАИ; написание (подготовка оригинального текста) – ШСО, ГАИ; написание (редактирование и рецензирование) – ШСО, ГАИ.

Ссылка для цитирования: Ширяева С.О., Григорьев А.И. Об электродиспергировании жидкости с мениска на торце капилляра: отрыв капли–распад выбрасываемой струи. *Коллоидный журнал / Colloid Journal.* 2026. Т. 88. № 5. С. 743–754. https://doi.org/10.31857/S0023291226050118

On Electrodispersion of Liquid from the Meniscus at the End of the Capillary: Droplet Detachment–Disintegration of the Ejected Jet

S.O. Shiryaeva, A.I. Grigor'ev*

Yaroslavsky State University named after P.G. Demidov, Yaroslavl, Russian Federation
**E-mail: grigorai@mail.ru*

Abstract. The place of the little-studied regime of "branching jets" in the general phenomenological classification is determined. It turned out that the "branching jets" mode is realized only for very large dimensionless liquid viscosities (in the region of transition from a dimensionles very viscous liquid to a dimensionles viscoelastic liquid), high electrical conductivity of the liquid, with a violation of the axisymmetry of the jet at the final stage of the phenomenon. The intensity of the electrostatic field in the vicinity of the daughter jets during the implementation of the "branching jets" mode is at the threshold of ignition in the surrounding gas environment corona discharge. It is shown that the "branching jet" and "fan" dispersion

© Ширяева С.О., Григорьев А.И., 2026 / © Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I., 2026

modes differ in the electrical voltage applied to the discharge gap and in the viscosity of the liquid being dispersed.

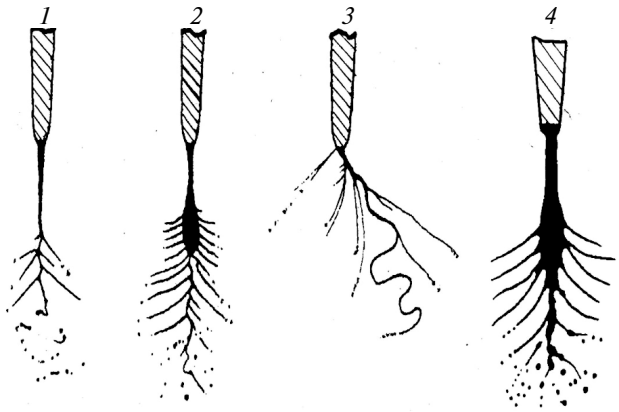
Keywords: jet, drop, modes of electric dispersion of liquid, dimensionles viscosity, conductivity

Funding. This work was funded from the budget of Yaroslavl State University. No additional grants have been received to conduct or direct this particular study.

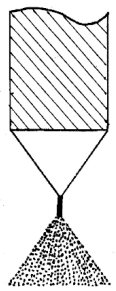
Conflict of interest. The authors state that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. Research concept – ShSO, GAI; analysis of literature and experimental data – ShSO, GAI; writing (original draft preparation) – ShSO, GAI; writing (review and editing) – ShSO, GAI.

For Citation: Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. On Electrodispersion of Liquid from the Meniscus at the End of the Capillary: Droplet Detachment–Disintegration of the Ejected Jet. *Kolloidnyi zhurnal / Colloid Journal.* 2026;88(5):743–754. (In Russ.) https://doi.org/10.31857/S0023291226050118



Режимы «ветвящихся струй»



«Веерный» режим

ВВЕДЕНИЕ

Как показывают уже первые эксперименты по электрическим разрядам с жидкого электрода (мениска жидкости на торце капилляра, по которому она подается в разрядную систему) и по электродиспергированию жидкости [1–2], электрогидродинамический распад жидкого мениска на торце вертикально ориентированного капилляра может идти по различным каналам. Конкретизация канала, по которому пойдет дальнейшее развитие процесса, самопроизвольно определяется в зависимости от физико-химических свойств жидкости и величины, приложенной к капилляру и противоэлектроду разности потенциалов. Это подтвердилось в последующие годы экспериментами, проведенными другими авторами (см., например, [3–6]).

Основной вывод, который следовал уже из [1–2], сводился к утверждению, что на феноменологию электрического разряда с жидкого электрода и электродиспергирования жидкости существенно влияют вязкость и электропроводность жидкости. Чтобы досконально разобраться в этом явлении следует рассмотреть его различные стадии и переход между ними.

Согласно существующим представлениям, электрогидродинамическая неустойчивость заряженной собственным или индуцированным зарядом поверхности жидкости начинается с неустойчивости капиллярных волн, всегда существующих в жидкости уже в силу теплового движения ее молекул [7–8]. Амплитуда этих капиллярных волн вдали от критических условий реализации неустойчивости меньше одного ангстрема, но при достижении их начинает неограниченно увеличиваться, т. е. реализуется неустойчивость. Скорость нарастания амплитуды со временем существенно зависит от вязкости и электропроводности жидкости, но в больших и малых масштабах она реализуется по-разному: чем больше вязкость и меньше электропроводность, тем медленнее нарастает неустойчивость, как показано в конкретных экспериментах и численных расчетах [1–2, 9–10].

Все рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат с началом на торце капилляра. Волновое возмущение цилиндрической поверхности струи запишется в виде [9–11]:

$$\xi(\phi,z,t) \sim \exp\left[s_{\mathrm{m}}(k)t\right]\cdot\exp\left(ikz + im\phi\right), \qquad (1)$$

где k – волновое число; m – азимутальное число, характеризующее осевую асимметрию поверхности струи; z, ϕ – координаты цилиндрической системы координат; $s_{\mathrm{m}}(k)$ – частота капиллярных волн (в общем случае комплексная); ξ – возмущение поверхности струи; t – время.

Рассмотрим последовательность реализации режимов капельно-струйного диспергирования и электродиспергирования, а также их смены по мере увеличения безразмерных электропроводности $\tilde{\eta}$ и кинематической вязкости $\tilde{\nu}$ жидкости. На плоскости $\tilde{\nu}$ и $\tilde{\eta}$ в безразмерных переменных, в которых $\sigma = \rho = R_0 = 1$, аналитическая запись выражений $\tilde{\nu}$ и $\tilde{\eta}$ через размерные величины имеет вид:

$$\tilde{\nu} \equiv \nu\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0}},\ \tilde{\eta} \equiv \frac{\eta}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}}, \qquad (2)$$

где σ и η – размерные коэффициенты поверхностного натяжения и удельной электропроводности диспергируемой жидкости, ν – размерный коэффициент кинематической вязкости жидкости; ρ – ее массовая плотность; R_0 – радиус капилляра.

Имея в виду окончательную формулировку поставленной проблемы, отметим, что свою задачу видим в отыскании места, которое должны занимать режимы «ветвящихся струй» (недостаточно на данный момент изученные) в давно выполненной общей классификации наблюдаемых режимов электродиспергирования жидкости с вершины мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему. Мы говорим об этих режимах во множественном числе в силу их весьма слабой изученности в экспериментальном смысле (из-за технических сложностей возможных экспериментов и, как следствие, в силу отсутствия точных измерений из-за существенного различия в зарисовках визуально наблюдаемых картин режимов) и превалировании на нынешнем этапе исследований чистой теории.

По возможности, желательно построить качественную модель режима «ветвящихся струй» хотя бы для азимутальной моды $m = 2$. Учтем при этом, что все физическое событие реализуется на длине струи в несколько диаметров капилляра (порядка сантиметра) в пространстве объемом порядка нескольких кубических сантиметров. Все происходит на коротком интервале времени, величина которого равна порядку обратной величины инкремента электрогидродинамической неустойчивости струи.

Отметим также, что струя и капли, от нее отрывающиеся, движутся вдоль капилляра с постоянной скоростью в силу инерции движения жидкости в капилляре, а ветвление струи происходит под действием электростатических сил в результате реализации электрогидродинамической неустойчивости капиллярных волн на ее поверхности.

АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОДИСПЕРГИРОВАНИЯ.

В зависимости от вязкости и электропроводности жидкости, а также от величины прикладываемого напряжения электрического поля при реализации электрогидродинамической неустойчивости мениска на торце капилляра или струи зафиксировано несколько десятков режимов электродиспергирования (см., например, [12–17], где кроме описания экспериментов приведены фотографии и рисунки экспериментально реализующихся режимов), в том числе и загадочный, до настоящего времени не истолкованный с позиций физики, так называемый режим «ветвящихся струй». Загадочный потому, что при электродиспергировании капиллярной жидкости, когда все острые углы феноменологии сглаживает ее поверхностное натяжение, получить рисунок режима в виде ветвящихся (с резкими изломами) струй несколько неожиданно.

Начнем с маловязкой жидкости $(\nu \to 0)$. На плоскости переменных $\tilde{\nu}$ (коэффициент безразмерной вязкости) и $\tilde{\eta}$ (коэффициент безразмерной удельной электропроводности) режим ее диспергирования займет левую, нижнюю позицию (см., например, рис. 1).

Сразу подчеркнем, что в настоящей работе авторы не ставят себе целью проведение полной классификации наблюдаемых в экспериментах режимов электродиспергирования жидкости, тем более что она весьма подробно проведена в [12–14], но всего лишь пытаются получить дополнительную информацию о малоизученном режиме «ветвящихся струй», о его положении среди прочих режимов. В этой связи на рис. 1 пустое пространство должно быть заполнено тремя десятками других экспериментально наблюдаемых режимов, местоположение которых сильно варьируется в зависимости от физико-химических свойств рабочей жидкости.

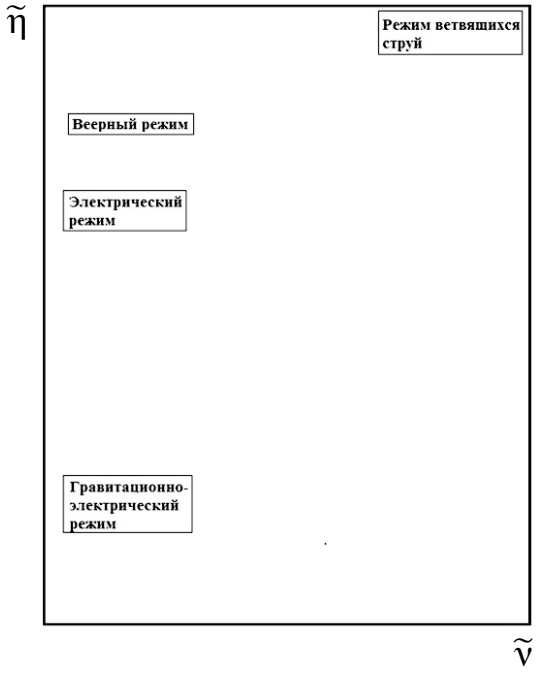


Рис. 1. Схематическое изображение упоминаемых режимов электродиспергирования жидкости на плоскости безразмерных переменных $\tilde{\nu}$ (коэффициент безразмерной кинематической вязкости диспергируемой жидкости) и $\tilde{\eta}$ (коэффициент безразмерной удельной электропроводности жидкости)

Fig. 1. Schematic representation of the mentioned modes of electric dispersion of liquid on the plane of dimensionless variables $\tilde{\nu}$ (coefficient of dimensionless kinematic viscosity of the dispersed liquid) and $\tilde{\eta}$ (coefficient of dimensionless specific electrical conductivity of the liquid)

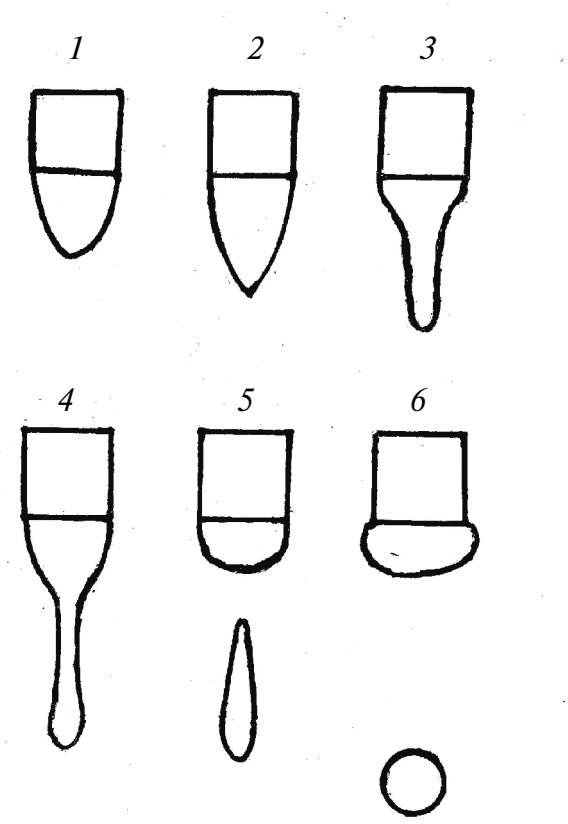


Рис. 2. Гравитационно-электрический режим. Схема постадийного отрыва капли

Fig. 2. Gravitational-electrical mode. Step-by-step drop separation scheme

Примем, что капилляр поддерживается при потенциале φ и ориентирован вертикально, т. е. капля в отсутствие электрического заряда на ней отрывается от мениска только под действием силы тяжести (вертикальная ось капилляра направлена вдоль силы тяжести). Этот режим проиллюстрирован рис. 2. При подаче на капилляр потенциала на отрывающуюся каплю действует сила тяжести, направленная вниз и параллельная ей электрическая сила, также стремящаяся оторвать заряженную каплю от мениска.

По мере увеличения разности потенциалов между капилляром и противоэлектродом феноменология отрыва капли от мениска будет изменяться. Размер капли будет уменьшаться, а электрический заряд, который приобретает капля, – увеличиваться (так как будет увеличиваться электрическая составляющая полной силы, отрывающей каплю). Кроме того, будет увеличиваться и частота отрыва капель (см. рис. 3). Максимальный заряд, который может получить в рассматриваемом режиме электродиспергирования отрывающаяся капля, зависит от электропроводности жидкости и электрического потенциала системы в месте отрыва капли, определяющегося потенциалом мениска и потенциалом собственного заряда капельки (см., например, [18], стр. 55, задача 1 и Приложение 1).

Получаемый каплей при электродиспергировании жидкости с мениска заряд (при достаточно высоких электропроводностях жидкости) может быть больше критического в смысле устойчивости по Рэлею [19], и капля распадется на более мелкие капельки [20], вокруг каждой из которых загорится коронный разряд, поддерживающийся за счет фотоионизации [20] (см. Приложение 2). Реализующийся при этом режим электродиспергирования жидкости назвали в начале прошлого века на начальном этапе изучения электрических разрядов с жидких электродов – «щеточным» [1], а позднее (через полстолетия) «веерным» [22–23], схематическое изображение этого режима приведено на рис. 4.

«Веерный» режим на плоскости значений безразмерной удельной электропроводности $\tilde{\eta}$ и кинематической вязкости $\tilde{\nu}$ жидкости располагается при больших значениях электропроводности и малых значениях безразмерной вязкости.



Рис. 3. Электрический режим
Fig. 3. Electrical mode

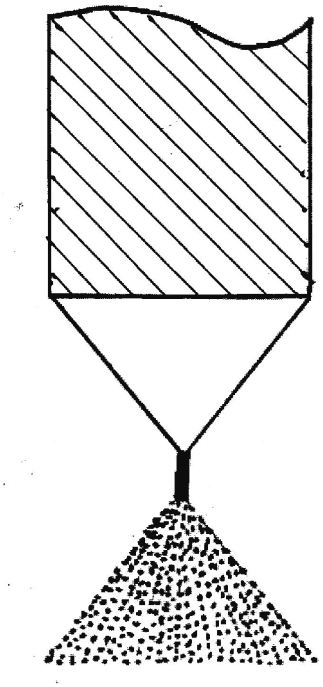


Рис. 4. «Веерный» режим
Fig. 4. "Fan" mode

Режим «ветвящихся струй» (см. рис. 5), режим диспергирования сильно заряженных струй, реализуется для высоких значений азимутальных мод, начиная со второй ($m = 2$) [12–15], при напряженностях прикладываемого электрического поля у поверхности струи весьма близких к пробойной величине в смысле зажигания в окружающей газовой среде коронного разряда (около 26 кВ/см [21]), что весьма затрудняет проведение экспериментов.

На рис. 5 в нескольких вариантах (для различных, но неопределенных значений азимутального числа m) приведены схематические изображения режимов распада капиллярной струи при высоких значениях прикладываемого напряжения, т. е. при больших значениях напряженности электрического поля у поверхности струи. Следует отметить, что рисунки приведенных режимов, отнесенных авторами к режиму «ветвящихся струй», не обязательно относятся именно ко второй азимутальной моде струи ($m = 2$), а могут относиться и к более высоким азимутальным модам. Точные экспериментальные измерения при высоких напряженностях электрического поля у поверхности струи, когда реализуется неустойчивость мод с $m \geq 2$, сильно затруднены в силу зажигания вокруг струи коронного разряда. Привязка какого-то одного из режимов, изображенных выше, к конкретному номеру азимутальной моды m ввиду малой изученности феномена пока не может быть проведена.

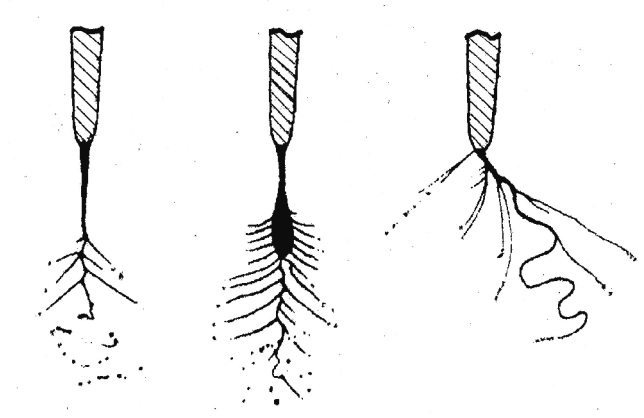


Рис. 5. Реализовавшиеся в экспериментах [12–15] режимы «ветвящихся струй» (возможно для различных значений азимутального числа $m \geqslant 2$)

Fig. 5. Modes of "branching jets" implemented in experiments [12–15] (possible for different values of azimuth number $m \geqslant 2$)

Если рассмотреть положение режима «ветвящихся струй» на плоскости безразмерных значений удельной электропроводности $\tilde{\eta}$ и кинематической вязкости $\tilde{\nu}$ жидкости (рис. 1), то можно отметить, что обсуждаемый режим реализуется при весьма больших значениях этих параметров.

О ВЫДЕЛЕНИИ РЕЖИМОВ

Говоря о выделении режимов электродиспергирования, сразу отметим, что поскольку в рассматриваемой области экспериментальные исследования существенно опережают теоретические, а режимы разделяются в основном феноменологически, то границы между ними размыты. Эти границы можно пытаться определять на основе методов размерности и численных расчетов. Так, упомянутые выше «веерный» режим и режим «ветвящихся струй» очень похожи между собой. Оба режима реализуются при весьма высоких напряжениях, прикладываемых к разрядному промежутку, и существенно различаются только безразмерной вязкостью жидкости. В «веерном» режиме характерное время отрыва капли от струи сравнимо со временем ее распада на более мелкие дочерние капельки. В режиме «ветвящихся струй» характерное время отрыва капли существенно больше, чем в «веерном» режиме, а дочерние капельки вовсе не претерпевают дальнейших распадов в силу большой безразмерной вязкости (по крайней мере в экспериментах такого замечено не было). Ветвление струи происходит вследствие локальных изменений величины электрической силы, действующей на вершины волновых возмущений поверхности струи и саму струю.

РЕЖИМ «ВЕТВЯЩИХСЯ СТРУЙ»

Для реализации режима «ветвящихся струй» необходимо совместное действие двух факторов: 1) весьма большие значения безразмерной кинематической вязкости жидкости, что может быть достигнуто при больших значениях размерной кинематической вязкости жидкости и малых значениях радиуса струи; 2) высокие значения напряженности электрического поля у поверхности струи (большие плотности поверхностного заряда), что достигается при больших значениях удельной электропроводности жидкости, больших прикладываемых напряжениях и малых радиусах струи [12–15].

Как отмечалось выше, экспериментальное исследование режима «ветвящихся струй» сильно затрудняет тот факт, что напряженность прикладываемого электростатического поля должна быть порядка критической для зажигания в газовой среде вокруг струи коронного разряда.

Для проведения дальнейшего обсуждения физических особенностей реализации этого режима примем (для определенности), что радиус испытывающей неустойчивость струйки $R\sim10^{-5}$ см, напряженность электростатического поля на поверхности струйки $E_* \approx 25$ кВ/см, что соответствует поверхностной плотности заряда χ на струе равной $\chi = E_*/4\pi \approx 2$ кВ/см [18] стр. 16.

При достижении безразмерным параметром Тейлора $w \equiv \dfrac{E^2R}{\pi\sigma}$ (характеризующим устойчивость незаряженной капли радиуса R по отношению к внешнему электростатическому полю напряженностью E) значения $w_{\text{cr}} = 2.905$ [24], критического для реализации электрогидродинамической неустойчивости азимутальной моды с $m = 2$, испытывающая неустойчивость волна начнет неконтролируемо увеличивать свою амплитуду. Изменение формы поверхности струи приведет к искажению электрического поля у ее поверхности, имеющему тот же порядок величины, что и возмущение поверхности.

Примем также, что струя движется в пространстве со скоростью, определяемой гидродинамическим давлением в капилляре и электростатическими силами. Еще один временной процесс, влияющий на эволюцию струи, – это гидродинамическое разделение струи перетяжками на отдельные бусины. Этот процесс обусловлен действием капиллярного давления и стремлением потенциальной энергии системы к минимуму (см., например, [30], стр. 5). Он характеризуется инкрементом, определяющимся решением дисперсионного уравнения для сильно заряженной струи с большой безразмерной вязкостью.

ОБ ИНКРЕМЕНТЕ ДРОБЛЕНИЯ НА ОТДЕЛЬНЫЕ КАПЛИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВОЙ СТРУИ

С целью получения выражения для инкремента распада струи на капли и сравнения его значений для струй с малой и большой безразмерной вязкостью сформулируем следующую упрощенную модельную задачу. Рассмотрим бесконечную, движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью $\vec{U}_0$ цилиндрическую струю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости. Массовую плотность жидкости обозначим ρ, коэффициент кинематической вязкости – ν, коэффициент поверхностного натяжения – σ. Примем, что струя поддерживается при постоянном электрическом потенциале Φ_*. Пусть жидкость является идеально проводящей, а электрический заряд распределен по цилиндрической в отсутствии волновых возмущений поверхности струи, с постоянной поверхностной плотностью заряда χ. Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью $\vec{U}_0$. В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\vec{U}(\vec{r},t)$ полностью определится возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Будем исследовать условия реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности струи.

Расчеты проведем в цилиндрической системе координат (r,φ,z), орт $\vec{n}_z$, которой ориентирован вдоль оси симметрии струи. Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде

$$r(\varphi,z,t) = R + \xi(\varphi,z,t),\ |\xi| << R.$$

Линеаризованная математическая формулировка задачи о расчете капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&r(\varphi,z,t) = 1 + \xi(\varphi,z,t),\ |\xi| << 1;\\
&\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = -\nabla P + \nu\cdot\Delta\vec{U};\ \nabla\vec{U} = 0;\ \Delta\phi = 0;\\
&r\to 0:\ |\vec{U}| < \infty;\ r\to\infty:\ |\nabla\phi|\to 0;\\
&r = 1:\ -\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_{\mathrm{r}} = 0;\\
&\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial U_{r}}{\partial\varphi} - U_{\varphi} = 0;\ \frac{\partial U_{\mathrm{z}}}{\partial r} + \frac{\partial U_{\mathrm{r}}}{\partial z} = 0;\\
&-p + 2\nu\frac{\partial U_{\mathrm{r}}}{\partial r} - p_{\mathrm{q}} + p_{\acute{\mathrm{o}}} = 0;\ \phi - 4\pi\eta\xi = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

В выписанной задаче ϕ, p, p_{q}, p_{σ} – вызванные капиллярными колебаниями поверхности добавки первого порядка малости по $|\xi|/R$ к электрическому потенциалу, гидродинамическому давлению, давлению электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно.

Раскладывая по степеням малой величины $|\xi|/R$ известные аналитические выражения для лапласовского давления $p_{\sigma} = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{n}}(t)$ (где $\vec{\mathrm{n}}(t)$ – орт нормали к поверхности струи в конкретной точке на ее поверхности) и давления электрического поля $p_{\mathrm{q}} = 2\pi\chi^2$, для величин первого порядка малости p_{q} и p_{σ} несложно получить следующие соотношения:

$$p_{\sigma} = -\left(\xi + \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right);\ p_{\mathrm{q}} = -4\pi\chi^2\xi - \chi\frac{\partial\phi}{\partial r}.$$

Решения задачи, удовлетворяющие выписанным уравнениям и граничным условиям для скалярных функций $\psi_j(\vec{\mathrm{r}},t)$ (при решении методом операторной скаляризации [27, 29, 30]) и электростатического потенциала $\Phi(\vec{\mathrm{r}},t)$, а также возмущения поверхности $\xi(\varphi,z,t)$ и функции тока $f(\vec{\mathrm{r}},t)$ (при решении методом введения функции тока [11]) записываются в виде бегущих вдоль оси симметрии невозмущенной струи волн следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\vec{\mathrm{r}},t) \sim \exp(st)\exp(ikz + im\varphi)K_{\mathrm{m}}(kr),\\
&\psi_j(\vec{\mathrm{r}},t) \sim \exp(st)\exp(ikz + im\varphi)I_{\mathrm{m}}(kr),\\
&f(\vec{\mathrm{r}},t) \sim \exp(st)\cdot\exp(ikz + im\varphi)K_{\mathrm{m}}(kr),\\
&\xi(\varphi,z,t) \sim \exp(st)\exp(ikz + im\varphi),
\end{aligned} \tag{4}$$

где i – мнимая единица; $\vec{\mathrm{r}}$ – радиус вектор; t – время; r,z,φ – координаты в цилиндрической системе; s – частота, в общем случае комплексная; k – волновое число; $I_{\mathrm{m}}(x)$ и $K_{\mathrm{m}}(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка m; m – азимутальный параметр.

Подставка проектов решений (4) в систему граничных условий (3) позволяет получить дисперсионное уравнение решаемой задачи, которое в асимптотике $(s/\nu k^2) \gg 1$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&s^2 + 3\nu k^2 s - G(k)(1 - k^2 - w\ (1 - H(k))) = 0,\\
&G(k) \equiv k\frac{I_1(k)}{I_0(k)},\ H(k) \equiv k\frac{K_1(k)}{K_0(k)},\ w \equiv 4\pi\chi^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решения уравнения (5) могут быть записаны как:

$$\begin{aligned}
s_{1,2} = &-\frac{3}{2}\nu k^2 \pm\\
&\pm\sqrt{\frac{9}{4}\nu^2 k^4 + G(k)(1 - k^2 - w\ (1 - H(k)))}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Мнимая часть частоты s определяет реальную частоту капиллярных волн ω, в то время как вещественная s в зависимости от значений физических величин, входящих в (5), определяет либо инкремент неустойчивости волн γ (он получается, если перед радикалом в (6), взять знак «плюс»), либо декремент их затухания (при знаке минус перед радикалом в (6)).

Если по (6) построить график зависимости безразмерного инкремента неустойчивости $\tilde{\gamma}$ от безразмерного волнового числа $\tilde{k}$, как это проделано в [11], то получится параболообразная кривая, ориентированная выпуклостью вверх (см. рис. 6а–6б, где соответствующие зависимости рассчитаны при различных безразмерных кинематических вязкостях).

Иначе говоря, на графике $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{k})$ имеется единственный максимум, определяющий длину капиллярной волны, обладающую максимальным инкрементом (см. рис. 6а). Феноменология распада струи на капли определяется именно модой капиллярных волн с максимальным инкрементом [11]. Легко видеть, что с увеличением безразмерной кинематической вязкости координата положения максимума на кривой $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{k})$ меняется мало, в то время как его значение (определяющее величину безразмерного инкремента) уменьшается примерно обратно пропорционально безразмерной вязкости.

Если безразмерный коэффициент кинематической вязкости жидкости струи $\tilde{\nu}$ велик (см., например, рис. 6б), то струя после вылета из сопла будет распадаться на капли медленно и до первого отрыва капли приобретет конечную длину. Это отмечается в публикациях [12–15, 28–30] и подчеркивается при создании классификации экспериментально наблюдаемых режимов диспергирования струй.

Что касается ветвления растущей струи, то этот процесс определяется мгновенной ориентацией вектора напряженности электростатического поля $\vec{\mathrm{E}}(t)$, коллинеарного вектору нормали в конкретной точке

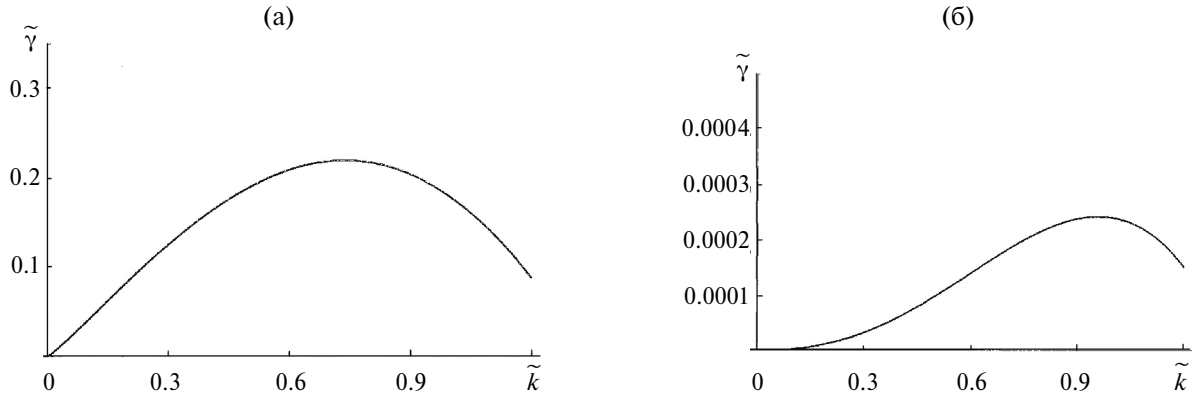


Рис. 6. Качественная зависимость величины безразмерного инкремента перетяжечной неустойчивости струи $\tilde{\gamma}$ от значения безразмерного волнового числа $\tilde{k}$, рассчитанная при $w = 1.05$ и значении безразмерного коэффициента кинематической вязкости (а) $\tilde{\nu} = 0.125$, (б) $\tilde{\nu} = 200$

Fig. 6. Qualitative dependence of the value of dimensionless increment of drag instability of the jet $\tilde{\gamma}$ on the value of dimensionless wave number $\tilde{k}$, calculated at $w = 1.05$ and value of dimensionless coefficient of kinematic viscosity (a) $\tilde{\nu} = 0.125$, (б) $\tilde{\nu} = 200$

на возмущенной поверхности струи: $\vec{E}(t)\|\vec{n}(t)$, направление которого зависит от возмущения $\xi(\varphi, z, t)$ в данной точке поверхности.

Таким образом, если выделить на распадающейся струе начавшуюся отделяться каплю и проследить за ней, то можно увидеть, что капля будет участвовать в двух процессах: 1) двигаться вместе со струей; 2) отделяться от струи с неким инкрементом. Расстояние от торца капилляра, на котором капля окончательно отделится от струи, определится этими двумя обстоятельствами. Если инкремент велик, то скорость поперечного сжатия струи существенно превышает скорость поступательного ее движения, и реализуемый режим будет «веерным». В противоположном случае (большая безразмерная вязкость, маленький инкремент) процесс отделения капли будет существенно более медленным; в результате формируется более длинная струя, на поверхности которой успевают сформироваться дочерние струйки; это характерно для режима «ветвящейся струи».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при электрогидродинамическом диспергировании жидкостей физические механизмы «веерного» режима и режима «ветвящихся струй» имеют между собой много общего: в обоих случаях электропроводность жидкости должна быть высокой. Однако оба эти режима реализуются при разных напряженностях электростатического поля в окрестности дочерних струй. Напряженность электростатического поля, в окрестности дочерних струй при реализации режима «ветвящихся струй» находится на пороге зажигания в окружающей газовой среде коронного разряда, тогда как для начала веерного режима она может быть на несколько порядков величины меньше.

Выяснилось, что режим «ветвящихся струй» реализуется только для весьма больших безразмерных вязкостей (в области перехода от очень вязкой жидкости, к вязкоупругой), хорошо проводящих жидкостей, с нарушением осесимметричности на финальной стадии явления, см. зарисовки этого режима. «Веерный» режим реализуется только для маловязких хорошо проводящих жидкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zeleny J. On the conditions of instability of electrified drops, with applications to the electrical discharge from liquid points. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1914. Vol. 18. Part 2. Pp. 71–83.
2. Zeleny J. Instability of electrified liquid surfaces. *Phys. Rev*. 1917. Vol. 10. no. 1. Pp. 1–6. https://doi.org/10.1103/PhysRev.10.1
3. Nolan J.J. The breaking of water-drops by electric fields. *Proc. R. Irish Akad., Sect. A: Math. Phys. Sci*. 1926. Vol. 37. Pp. 28–39.
4. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields. *Proc. R. Soc. A*. 1931. Vol. 133. no. 822. Pp. 565–587. https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0168
5. English W.H. Positive and negative point-to-plane corona in air. *Phys. Rev.* 1948. Vol. 74. no. 2. Pp. 170–178. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.170
6. Drozin V.G. The electrical dispersion of liquids as aerosols. *J. Colloid Sci.* 1955. Vol. 10. no. 2. Pp. 158–164.
7. Френкель Я.И. *Теория явлений атмосферного электричества*. Ленинград–Москва: Гостехтеориздат, 1949.

8. Френкель Я.И. *Кинетическая теория жидкости*. Н.Н. Семенов, А.Е. Глауберман (ред.). Ленинград: Наука, 1975.
9. Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Нелинейные движения свободной поверхности заряженной капли сильно вязкой жидкости. *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31. № 15. С. 12–17.
10. Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Аналитическое исследование нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости. *Журнал технической физики*. 2005. Т. 75. № 12. С. 33–46.
11. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. Москва: ГИФМЛ, 1959.
12. Cloupeau M., Prunet-Foch B. Electrostatic spraying of liquids: Main functioning modes. *J. Electrost.* 1990. Vol. 25. no. 2. Pp. 165–184. https://doi.org/10.1016/0304-3886(90)90025-q
13. Cloupeau M., Prunet-Foch B. Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review. *J. Aerosol Sci.* 1994. Vol. 25. no. 6. Pp. 1021–1036. https://doi.org/10.1016/0021-8502(94)90199-6
14. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying. *J. Aerosol Sci.* 1999. Vol. 30. no. 7. Pp. 873–893. https://doi.org/10.1016/S0021-8502(98)00787-3
15. Kim O.V., Dunn P.F. Controlled production of droplets by in-flight electrospraying. *Langmuir.* 2010. Vol. 26. no. 20. Pp. 15807–15813. https://doi.org/10.1021/la102793j
16. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Регистрация звуковых пакетов при слиянии падающей капли с жидкостью в электростатическом поле. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2025. Т. 524. № 1. С. 76–88. https://doi.org/10.7868/S3034508125050125
17. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Эволюция картины течения и акустического излучения при слиянии свободно падающей капли с жидкостью в электростатическом поле. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2025. № 5. С. 151–172. http://doi.org/10.7868/S3034534025050138
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред*. Л.П. Питаевский (ред.). Москва: Наука, 1992.
19. Rayleigh L. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* 1882. Vol. 14. no. 87. Pp. 184–186. https://doi.org/10.1080/14786448208628425
20. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. *Журнал технической физики*. 1985. Т. 55. № 7. С. 1272–1278.
21. Александров А.Ф., Бычков В.Л., Грачев Л.П. и др. Ионизация воздуха в околокритическом электрическом поле. *Журнал технической физики*. 2006. Т. 76. № 3. С. 38–43.
22. Войцеховский Б.В., Войцеховский Б.Б. Свечение в потоке заряженных капель. *Письма в ЖЭТФ*. 1976. Т. 23. № 1. С. 37–39.
23. Войцеховский Б.Б. Огни Эльма и свечение на предметах в облаке электрически заряженных капель воды. *Доклады Академии наук СССР*. 1982. Т. 262. № 1. С. 84–88.
24. Григорьев А.И. Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости. *Журнал технической физики*. 2009. Т. 79. № 4. С. 36–45.
25. Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. Р.Г. Баранцев (ред.). Москва: Мир, 1984.
26. Taylor G. Disintegration of water drop in an electric field. *Proc. R. Soc. A*. 1964. Vol. 280. no. 1382. Pp. 383–397. https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0151
27. Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Скаляризация векторных краевых задач*. Москва: Русайнс, 2020.
28. Григорьев А.И., Ширяева С.О. О теоретических посылках к классификации режимов электродиспергирования жидкости. *Коллоидный журнал*. 2022. Т. 84. № 2. С. 127–140. https://doi.org/10.31857/S0023291222020045
29. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость высоких азимутальных мод заряженной струи. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2021. № 3. С. 48–55. https://doi.org/10.31857/S0568528121030051
30. Григорьев А.И., Ширяева С.О. *Электрогидродинамические неустойчивости капиллярных струй*. Москва: Директ-Медиа, 2026.

REFERENCES

1. Zeleny J. On the conditions of instability of electrified drops, with applications to the electrical discharge from liquid points. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1914;**18**(Part 2):71–83.
2. Zeleny J. Instability of electrified liquid surfaces. *Phys. Rev.* 1917;**10**(1):1–6. https://doi.org/10.1103/PhysRev.10.1
3. Nolan J.J. The breaking of water-drops by electric fields. *Proc. R. Irish Akad., Sect. A: Math. Phys. Sci.* 1926;**37**:28–39.
4. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields. *Proc. R. Soc. A.* 1931;133(822):565–587. https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0168

5. English W.H. Positive and negative point-to-plane corona in air. *Phys. Rev.* 1948;**74**(2):170–178. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.170
6. Drozin V.G. The electrical dispersion of liquids as aerosols. *J. Colloid Sci.* 1955;**10**(2):158–164.
7. Frenkel Ia.I. *Teoriia iavlenii atmosfernogo elektrichestva* [*Theory of atmospheric electricity phenomena*]. Leningrad–Moskva: Gostekhteorizdat, 1949. (In Russ.)
8. Frenkel Ia.I. *Kineticheskaia teoriia zhidkosti* [*Kinetic theory of fluid*]. N.N. Semenov, A.E. Glauberman (eds.). Leningrad: Nauka, 1975. (In Russ.)
9. Zharov A.N., Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. Nonlinear oscillations of the free surface of a charged drop of a highly viscous liquid. *Tech. Phys. Lett.* 2005;**31**(8):635–638. https://doi.org/10.1134/1.2035349
10. Zharov A.N., Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. Analytical study of nonlinear vibrations of a charged viscous liquid drop. *Tech. Phys.* 2005;**50**(12):1568–1582. https://doi.org/10.1134/1.2148559
11. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaia gidrodinamika* [*Physico-chemical hydrodynamics*]. Moskva: GIFML, 1959. (In Russ.)
12. Cloupeau M., Prunet-Foch B. Electrostatic spraying of liquids: Main functioning modes. *J. Electrost.* 1990;**25**(2):165–184. https://doi.org/10.1016/0304-3886(90)90025-q
13. Cloupeau M., Prunet-Foch B. Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review. *J. Aerosol Sci.* 1994;**25**(6):1021–1036. https://doi.org/10.1016/0021-8502(94)90199-6
14. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying. *J. Aerosol Sci.* 1999;**30**(7): 873–893. https://doi.org/10.1016/S0021-8502(98)00787-3
15. Kim O.V., Dunn P.F. Controlled production of droplets by in-flight electrospraying. *Langmuir.* 2010;**26**(20):15807–15813. https://doi.org/10.1021/la102793j
16. Chashechkin Iu.D., Prokhorov V.E. Registratsiia zvukovykh paketov pri sliianii padaiushchei kapli s zhidkostiu v elektrostaticheskom pole [Registration of sound packets when a falling drop merges with a liquid in an electrostatic field]. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki* [*Doklady Physics*]. 2025;**524**(1):76–88. (In Russ.) https://doi.org/10.7868/S3034508125050125
17. Chashechkin Iu.D., Prokhorov V.E. Evoliutsiia kartiny techeniia i akusticheskogo izlucheniia pri sliianii svobodno padaiushchei kapli s zhidkostiu v elektrostaticheskom pole [Evolution of the flow pattern and acoustic radiation during the merger of a free-falling droplet with a liquid in an electrostatic field]. *Izvestiia RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [*Fluid Dyn.*]. 2025;(5):151–172. (In Russ.) https://doi.org/10.7868/S3034534025050138
18. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaia fizika. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* [*Theoretical physics. Vol. VIII. Electrodynamics of continuous media*]. L.P. Pitaevskii (ed.). Moskva: Nauka, 1992. (In Russ.)
19. Rayleigh L. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* 1882;**14**(87):184–186. https://doi.org/10.1080/14786448208628425
20. Grigorev A.I. O mekhanizme neustoichivosti zariazhennoi provodiashchei kapli [On the instability mechanism of a charged conductive droplet]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [*Tech. Phys.*]. 1985;**55**(7):1272–1278. (In Russ.)
21. Aleksandrov A.F., Bychkov V.L., Grachev L.P. et al. Air ionization in a near-critical electric field. *Tech. Phys.* 2006;**51**(3):330–335. https://doi.org/10.1134/S1063784206030066
22. Voitsekhovskii B.V., Voitsekhovskii B.B. Svechenie v potoke zariazhennykh kapel [Glow in a stream of charged droplets]. *Pisma v ZhETF* [*Tech. Phys. Lett.*]. 1976;**23**(1):37–39. (In Russ.)
23. Voitsekhovskii B.B. Ogni Elma i svechenie na predmetakh v oblake elektricheski zariazhennykh kapel vody [St. Elmo's fire and luminescence on objects in a cloud of electrically charged water drops]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [*Sov. Phys. Dokl.*]. 1982;**262**(1):84–88.
24. Grigor'ev A.I. Electrostatic instability of a heavily charged conducting liquid jet. *Tech. Phys.* 2009;**54**(4):482–490. https://doi.org/10.1134/S1063784209040070
25. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1981.
26. Taylor G. Disintegration of water drop in an electric field. *Proc. R. Soc. A.* 1964;**280**(1382):383–397. https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0151
27. Lazariants A.E., Shiriaeva S.O., Grigorev A.I. *Skaliarizatsiia vektornykh kraevykh zadach* [*Scalarization of vector boundary value problems*]. Moskva: Rusains, 2020. (In Russ.)
28. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. On theoretical prerequisites for the classification of liquid electrodispersion modes. *Colloid J.* 2022;**84**(2):127–139. https://doi.org/10.1134/S1061933X22020041
29. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. Electrostatic instability of the higher-order azimuthal modes of a charged jet. *Fluid Dyn.* 2021;**56**(3):353–360. https://doi.org/10.1134/S0015462821030058
30. Grigorev A.I., Shiriaeva S.O. *Elektrogidrodinamicheskie neustoichivosti kapilliarnykh strui* [*Electrohydrodynamic instabilities of capillary jets*]. Moskva: Direkt-Media, 2026. (In Russ.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Об электрическом потенциале эмитированной капли и о ее заряжении при электродиспергировании

Сформулируем следующую задачу: пусть большая заряженная капля электропроводной жидкости (радиус R_0, заряд Q_0) электрогидродинамически неустойчива и эмитировала маленькую капельку (радиус r_0 и заряд q_0), причем $R_0 \gg r_0$. Капли для простоты примем сферическими, в момент разделения соединенными тонкой жидкой перетяжкой, и они находятся на расстоянии l друг от друга. Вся система поддерживается при электрическом потенциале Φ_0.

Выразим заряд маленькой сферы q_0 через физические характеристики большой и маленькой капель.

Решение. Примем, что расстояние $l - r_0 \gg r_0$, но $l - r_0 > R_0$. Потенциал маленькой сферы будет складываться из потенциала, создаваемого зарядом большой сферы в месте нахождения маленькой плюс потенциал собственного заряда маленькой сферы:

$$\varphi = \frac{R_0}{l}\varphi + \frac{q_0}{r_0}.$$

Из этого выражения легко найти потенциал φ в первом порядке малости по безразмерному параметру $\frac{R_0}{l}$:

$$\varphi = \frac{q_0}{r_0(1-\frac{R_0}{l})} \approx \frac{q_0}{r_0}[1 + \frac{R_0}{l} + (\frac{R_0}{l})^2 + ...] =$$

$$= \frac{q_0}{r_0}[1 + \frac{R_0}{l} + O(\frac{R_0^2}{l^2})],$$

где O – символ порядка малости [25]. Из этого выражения можно найти и заряд маленькой капельки:

$$q_0 \approx r_0\varphi(1 - \frac{R_0}{l}).$$

Видно, что заряд малой сферы будет меньше, чем был бы, если бы она находилась при потенциале φ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценка устойчивости дочерней капельки по отношению к полному ее заряду

Изолированная заряженная зарядом q сферическая капелька радиусом r обладает свободной энергией F, представляющей собой сумму энергии сил поверхностного натяжении и собственной энергии электрического заряда:

$$F = 4\pi r^2\sigma + \frac{q^2}{2r}.$$

Экстремум потенциальной энергии такой капельки будет иметь место при ее радиусе, соответствующем условию:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 8\pi r\sigma - \frac{q^2}{2r^2} = 0;$$

или при

$$\frac{q^2}{16\pi\sigma r^3} \equiv W = 1;$$

т .е. когда капелька находится на пороге электростатической устойчивости по Рэлею [19].

Если взять от F вторую производную по r, то получим, что $\left(\partial^2 F/\partial r^2\right) > 0$. Иначе говоря, экстремуму F соответствует минимум, и наличие на капельке предельного по Рэлею (для данного радиуса) заряда наиболее выгодно с термодинамической точки зрения.

Естественно задаться вопросом: как изменится заряд капли, если в месте ее нахождения создано электростатическое поле. Такой вопрос целесообразен, поскольку при электродиспергировании дочерние капельки формируются в электростатическом поле родительской капли (или в поле жидкого мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему). Итак, пусть та же капелька находится в однородном (в пределах объема капельки) электростатическом поле с напряженностью E. Полная потенциальная энергия капельки F_* в этом случае запишется в виде:

$$F_* = 4\pi r^2\sigma + \frac{q^2}{2r} + \frac{E^2}{2}\left(\frac{r^3}{3} + C\right) + q\varphi_*.$$

В этом соотношении C – константа, зависящая от геометрии пространства, занятого электростатическим полем; φ_* – полный потенциал электростатического поля, в котором находится капля. Поскольку мы проводим качественный анализ, то сфероидальной деформацией поверхности капли пренебрежем ввиду ее малости.

Находя первую производную от F_* по r и приравнивая ее, как и выше, нулю, можно получить для дочерней капельки значения параметра Рэлея, соответствующее экстремуму (минимуму, как и раньше) ее полной потенциальной энергии F_*, в виде:

$$W_e = 1 + \frac{E^2 r}{16\pi\sigma} \equiv 1 + w.$$

Безразмерный параметр w, как выше уже отмечалось, характеризует устойчивость капли по отношению к внешнему электростатическому полю [26]. Также как и в случае изолированной сферической заряженной капельки, получаем, что минимуму потенциальной энергии системы соответствует значение параметра Рэлея W_e большее единицы и, следовательно, запредельное в смысле электростатической устойчивости по отношению к собственному заряду. Таким образом, согласно полученным результатам, дочерняя капелька должна распасться по тому же закону.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ширяева Светлана Олеговна – д-р физ.-мат. наук; проф., Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Российская Федерация
E-mail: shir@uniyar.ac.ru
https://orcid.org/0009-0000-6340-0448

Григорьев Александр Иванович – д-р физ.-мат. наук; проф., Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Российская Федерация
E-mail: grigorai@mail.ru
https://orcid.org/0009-0001-8510-3265

ABOUT THE AUTHORS

Shiryaeva, Svetlana O. – Dr. Sci. (Physics and Mathematics); Full Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: shir@uniyar.ac.ru
https://orcid.org/0009-0000-6340-0448

Grigor'ev, Aleksandr I. – Dr. Sci. (Physics and Mathematics); Full Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: grigorai@mail.ru
https://orcid.org/0009-0001-8510-3265

Поступила в редакцию 29.05.2026
После доработки 09.07.2026
Принята к публикации 13.07.2026