DOI: 10.31857/S0023291226060034
УДК 532.72;541.124;517.958

Степенное точное решение задачи стационарной диффузии с реакцией первого порядка около сферической частицы в среде со степенным коэффициентом диффузии

К.В. Губарева[1,*], Е.Ю. Просвиряков[2,3]

[1]Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация
[2]Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация
[3]Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация
**E-mail: r.kristina2017@mail.ru*

Аннотация. Построено точное аналитическое решение нелинейного уравнения диффузии–реакции, описывающего стационарный массоперенос от сферической частицы в окружающую реакционно-активную среду со степенной зависимостью коэффициента диффузии от концентрации. Показано, что степенной профиль существует только при строгой связи между числом Дамкёлера и показателем нелинейности. Определен допустимый интервал показателя, гарантирующий положительность коэффициента диффузии и конечность полной скорости реакции. Выведена формула для числа Шервуда, которое зависит исключительно от показателя нелинейности.

Ключевые слова: нелинейная диффузия, сферическая частица, реакция первого порядка, точное решение, степенной профиль, число Дамкёлера, число Шервуда

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00339), https://rscf.ru/project/25-29-00339/.

Конфликт интересов. Авторы данной статьи заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Вклад авторов в публикацию. Концепция исследования – ПЕЮ; аналитическое решение – ГКВ, ПЕЮ; численная верификация и построение графиков – ГКВ; анализ результатов – ГКВ, ПЕЮ; написание рукописи – ГКВ, ПЕЮ; редактирование – ПЕЮ.

Ссылка для цитирования: Губарева К.В., Просвиряков Е.Ю. Степенное точное решение задачи стационарной диффузии с реакцией первого порядка около сферической частицы в среде со степенным коэффициентом диффузии. *Коллоидный журнал / Colloid Journal*. 2026. Т. 88. № 6. С. 794–802. https://doi.org/10.31857/S0023291226060034

© Губарева К.В., Просвиряков Е.Ю., 2026

DOI: 10.31857/S0023291226060034

Exact Power-Law Solution of the Steady-State Diffusion Problem with a First-Order Reaction Near a Spherical Particle in a Medium with a Power-Law Diffusion Coefficient

K.V. Gubareva[1,*], E.Yu. Prosviryakov[2,3]

[1]*Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*
[2]*Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation*
[3]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation*
**E-mail: r.kristina2017@mail.ru*

Abstract. An exact analytical solution of the nonlinear diffusion–reaction equation describing steady-state mass transfer from a spherical particle into the surrounding reactive medium with a power-law concentration dependence of the diffusion coefficient is constructed. It is shown that a power law profile exists only under a strict relationship between the Damköhler number and the nonlinearity exponent. The admissible range of the exponent that ensures the positivity of the diffusion coefficient and the finiteness of the total reaction rate is determined. A formula for the Sherwood number is derived, which depends solely on the nonlinearity exponent.

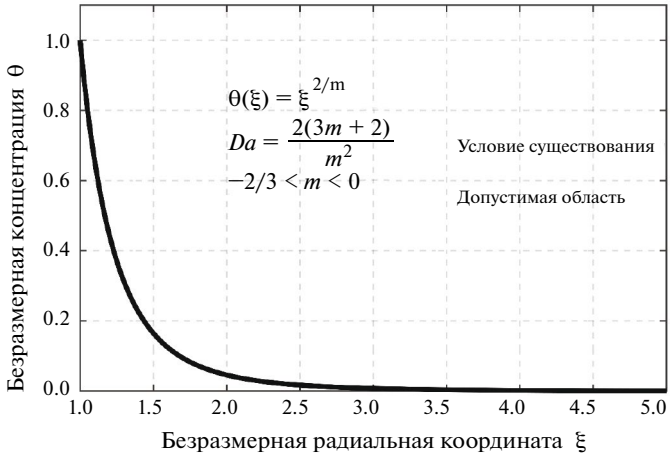
Keywords: nonlinear diffusion, spherical particle, first-order reaction, exact solution, power-law profile, Damköhler number, Sherwood number

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00339), https://rscf.ru/project/25-29-00339/.

Conflict of interest. The authors of this article declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. Research concept – PEYu; analytical solution – GKV, PEYu; numerical verification and plotting – GKV; analysis of the results – GKV, PEYu; manuscript writing – GKV, PEYu; editing – PEYu.

For Citation: Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu. Exact Power-Law Solution of the Steady-State Diffusion Problem with a First-Order Reaction Near a Spherical Particle in a Medium with a Power Law Diffusion Coefficient. *Kolloidnyj zhurnal / Colloid Journal*. 2026;88(6):794–802. (In Russ.)
https://doi.org/10.31857/S0023291226060034



© Gubareva K.V., Prosviryakov E.Yu., 2026

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о диффузии, сопровождающейся объемной химической реакцией, встречаются в теории катализа, в мембранных технологиях, при описании транспорта в пористых средах и биологических тканях [1]. Классическая линейная постановка, когда коэффициент диффузии считается постоянным, хорошо изучена и допускает аналитические решения для стандартных геометрий [2]. Однако во многих случаях диффузионная подвижность меняется с концентрацией. Например, в набухающих полимерных гелях, микропористых адсорбентах при малых заполнениях и вблизи критической точки расслаивания растворов коэффициент диффузии часто описывают степенным законом $D(C) = D_0C^m$ с отрицательным m [3, 4].

Степенная зависимость $D(C)$ возникает также в моделях фильтрации, при описании диффузии в неньютоновских жидкостях и в задачах конвективного тепломассопереноса с переменными свойствами [5, 6]. Концентрационно-зависимая диффузия изменяет устойчивость течений и приводит к появлению новых структур в реакционно-диффузионных системах [7, 8]. Практическая сторона подобных моделей затрагивается, в частности, при определении эффективного коэффициента диффузии в пористых материалах с учетом его концентрационной зависимости [9].

Для тестирования численных методов – решеточных уравнений Больцмана [10], конечных элементов [11] и прямого моделирования с варьированием Da [12] – нужны надежные аналитические ориентиры. Поэтому точные решения нелинейных уравнений диффузии–реакции сохраняют востребованность. Такие решения служат эталонами для численных алгоритмов и помогают понять основные закономерности массопереноса [13–15]. Методы построения точных решений уравнений математической физики систематизированы в [16, 17].

Современное состояние исследований по числу Шервуда представлено в [18]. Для нелинейных уравнений диффузии предложены как аналитические, так и численные подходы: методы параметрической идентификации [19], нелокальные аппроксимации [20]. Массообмен у сферических частиц с объемной реакцией первого порядка анализировался в [21–23]; методы построения точных решений нелинейных уравнений диффузии развивались в [24, 25].

Цель работы – построить точное степенное решение стационарной задачи диффузии от поверхности сферической частицы в реакционно-активную среду со степенным коэффициентом диффузии и детально проанализировать его свойства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одиночную сферическую частицу радиуса a, неподвижно закрепленную в неограниченной неподвижной среде, в которой растворенное вещество диффундирует и одновременно расходуется за счет гомогенной химической реакции первого порядка с константой скорости k (рис. 1).

Коэффициент диффузии предполагается зависящим от локальной концентрации по степенному закону $D(C) = D_0C^m$, где $D_0 > 0, m$ – безразмерная постоянная. В силу сферической симметрии стационарное уравнение массопереноса записывается в виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 D(C)\frac{dC}{dr}\right) = kC, r > a. \qquad (1)$$

На поверхности частицы поддерживается постоянная концентрация C_s, а на бесконечности раствор полностью расходуется:

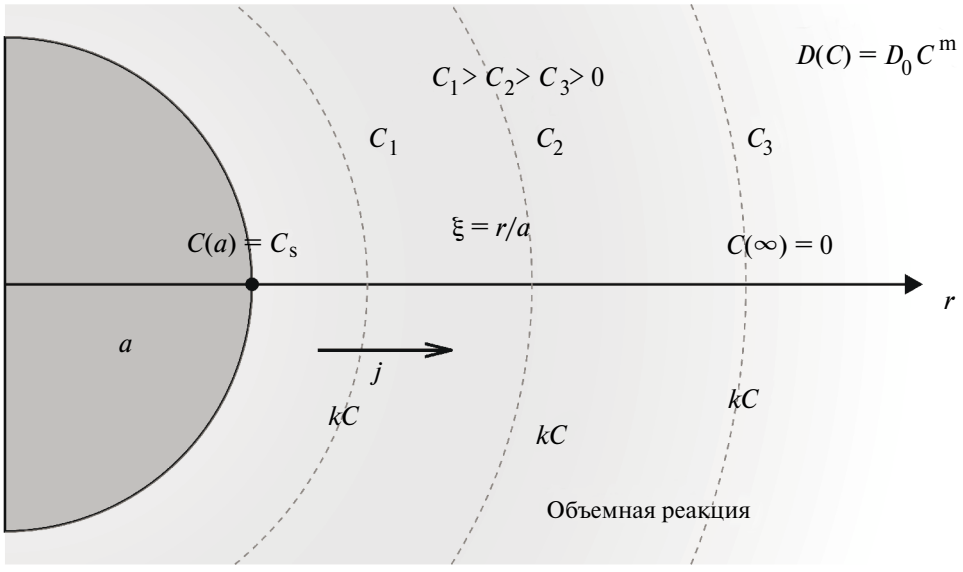


Рис. 1. Геометрия задачи
Fig. 1. Geometry of the problem

$$C(a) = C_s,\ \lim_{r\to\infty} C(r) = 0. \quad (2)$$

Перейдем к безразмерным переменным $\xi = r/a$ и $\theta(\xi) = C(r)/C_s$. Подстановка в (1) дает

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\theta^m\frac{d\theta}{d\xi}\right) = Da\theta, \quad (3)$$

где число Дамкёлера определено как

$$Da = \frac{ka^2}{D_0 C_s^m}. \quad (4)$$

Безразмерные граничные условия принимают вид:

$$\theta(1) = 1,\ \lim_{\xi\to\infty}\theta(\xi) = 0. \quad (5)$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Будем искать решение уравнения (3) в форме степенной функции

$$\theta(\xi) = A\xi^\alpha,\ A > 0,\ \alpha = \text{const}. \quad (6)$$

Вычислим последовательно производные. Имеем $d\theta/d\xi = A\alpha\xi^{\alpha-1}$, $\theta^m = A^m\xi^{\alpha m}$. Тогда выражение под знаком внешней производной в (3) запишется как

$$\xi^2\theta^m\frac{d\theta}{d\xi} = A^{m+1}\alpha\xi^{\alpha m+\alpha+1}.$$

Дифференцируя по ξ и деля на ξ^2, получим левую часть (3):

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\theta^m\frac{d\theta}{d\xi}\right) = A^{m+1}\alpha(\alpha m+\alpha+1)\xi^{\alpha m+\alpha-2}. \quad (7)$$

Правая часть после подстановки (6) равна $DaA\xi^\alpha$. Для того чтобы уравнение удовлетворялось тождественно при всех ξ, необходимо совпадение показателей степени:

$$\alpha m + \alpha - 2 = \alpha,\ \alpha = \frac{2}{m}, m \neq 0. \quad (8)$$

Приравнивая коэффициенты (после сокращения на A), находим

$$A^m\alpha(\alpha m+\alpha+1) = Da. \quad (9)$$

С учетом $\alpha m = 2$ выражение в скобках равно $3 + 2/m$. Граничное условие на поверхности $\theta(1) = 1$ дает $A = 1$. Подставляя это значение и $\alpha = 2/m$ в (9), получаем ключевое соотношение между числом Дамкёлера и показателем нелинейности:

$$Da = \frac{2}{m}\left(3+\frac{2}{m}\right) = \frac{2(3m+2)}{m^2}. \quad (10)$$

Выбор степенной пробной функции $\theta(\xi) = A\xi^\alpha$ обусловлен масштабной инвариантностью оператора нелинейной диффузии при степенной зависимости $D(\theta) \sim \theta^m$. После подстановки нелинейный диффузионный член преобразуется в степенную функцию той же переменной, что позволяет сбалансировать его с линейным реакционным стоком на всем интервале $\xi \in (1,\infty)$. Условие совместности (10) выделяет в пространстве параметров (m, Da) однопараметрическое семейство точных решений.

Найдем допустимые значения m. Положительность Da требует $3m + 2 > 0$, т. е. $m > -2/3$. Условие $\theta(\infty) = 0$ с учетом $\theta = \xi^{2/m}$ выполнено лишь при $2/m < 0$, т. е. $m < 0$. Следовательно, показатель нелинейности должен лежать в интервале

$$-\frac{2}{3} < m < 0. \quad (11)$$

Окончательное безразмерное решение имеет вид:

$$\theta(\xi) = \xi^{2/m}, m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right). \quad (12)$$

В размерных переменных ему соответствует

$$C(r) = C_s\left(\frac{r}{a}\right)^{2/m}. \quad (13)$$

Поскольку $m < 0$, показатель $2/m$ отрицателен. Удобно ввести положительную величину $p = -2/m$; тогда

$$C(r) = C_s\left(\frac{a}{r}\right)^p, \quad p > 3. \quad (14)$$

Из определения (4) и связи (10) можно выразить масштабный коэффициент диффузии:

$$D_0 = \frac{ka^2}{C_s^m}\cdot\frac{m^2}{2(3m+2)}. \quad (15)$$

При $m > -2/3$ знаменатель положителен, так что $D_0 > 0$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Прямая подстановка (12) в исходное уравнение (3) с учетом (10) обращает его в тождество. Граничные условия выполняются автоматически: $\theta(1) = 1, \theta(\infty) = 0$.

Проверим сходимость интеграла полной скорости реакции

$$I = \int_1^\infty \theta(\xi)\xi^2 d\xi.$$

Подставляя $\theta(\xi) = \xi^{2/m}$, находим аналитически

$$I = \int_1^\infty \xi^{2/m+2}d\xi = \left[\frac{\xi^{2/m+3}}{2/m+3}\right]_1^\infty.$$

Верхний предел обращается в нуль только при $2/m + 3 < 0$, т. е. $m > -2/3$. При выполнении этого условия интеграл сходится к конечному значению

$$I = -\frac{1}{2/m+3} = \frac{-m}{3m+2}. \quad (16)$$

Таким образом, полная скорость реакции в бесконечном объеме конечна. Диффузионный поток

вещества от поверхности частицы полностью компенсируется его объемным стоком.

Рассчитаем число Шервуда, характеризующее интенсивность массообмена. Поток вещества на поверхности $r = a$ определяется законом Фика:

$$j = -D(C)\left.\frac{dC}{dr}\right|_{r=a}.$$

С помощью (14) находим производную $\frac{dC}{dr} = -pC_s a^p r^{-p-1}$, так что на поверхности $\left.\frac{dC}{dr}\right|_{r=a} = -pC_s/a$. Коэффициент диффузии при $C = C_s$ равен $D_0 C_s^m$. Тогда

$$j = \frac{pD_0 C_s^{m+1}}{a}.$$

Определим число Шервуда, используя радиус частицы a в качестве характерного размера:

$$Sh = \frac{aj}{D(C_s)C_s}.$$

Подстановка дает

$$Sh = p = -\frac{2}{m}. \qquad (17)$$

В рамках найденного семейства точных решений число Шервуда определяется только показателем m: $Sh = -2/m$. Однако эта независимость от k, a и C_s не является универсальной: она справедлива лишь при выполнении условия совместности (10). Используя (10), можно выразить Sh непосредственно через число Дамкёлера:

$$Sh = \frac{3 + \sqrt{9 + 4Da}}{2}.$$

В допустимом интервале $-2/3 < m < 0$ значение Sh превосходит 3 и неограниченно возрастает при $m \to 0^-$.

Это свойство отличает найденное решение от многих полуэмпирических корреляций для числа Шервуда [18]. Отметим, что в инженерных корреляциях для сферических частиц в качестве характерного размера обычно используют диаметр $d = 2a$. При таком выборе значения числа Шервуда будут в два раза превышать приведенные в настоящей работе.

На рис. 2а показаны профили безразмерной концентрации $\theta(\xi)$ при нескольких характерных значениях $m = -0.65, -0.55, -0.45, -0.35, -0.25$. Все кривые монотонно спадают от единицы до нуля. Чем ближе m к нулю, тем круче убывание: так, при $m = -0.65$ концентрация спадает по закону $\xi^{-3.08}$, а при $m = -0.25$ – уже по ξ^{-8}.

На рис. 2б приведена зависимость числа Шервуда от показателя m. Полупрозрачная заливка выделяет физически допустимую область $-2/3 < m < 0$; пунктирные линии отмечают ее границы. Кривая $Sh(m) = -2/m$ монотонно убывает от бесконечности при $m \to 0^-$ до значения 3 при $m \to -2/3^+$. Вне этой области степенное решение не существует, что видно по отсутствию кривой.

Контуры постоянной концентрации на плоскости (ξ, m) даны на рис. 2в. При фиксированном ξ концентрация растет с приближением m к $-2/3$; при фиксированном m – убывает с удалением от поверхности. Наибольшие значения θ сосредоточены вблизи поверхности для малых $|m|$.

На рис. 3а построен график функции $Da(m)$ из (10). Когда m приближается к $-2/3$ справа, Da стремится к нулю; при уменьшении $|m|$ ($m \to 0^-$) Da неограниченно возрастает. Медленно спадающим профилям (большие $|m|$) соответствует слабая реакция, а быстро убывающим (малые $|m|$) – интенсивный сток.

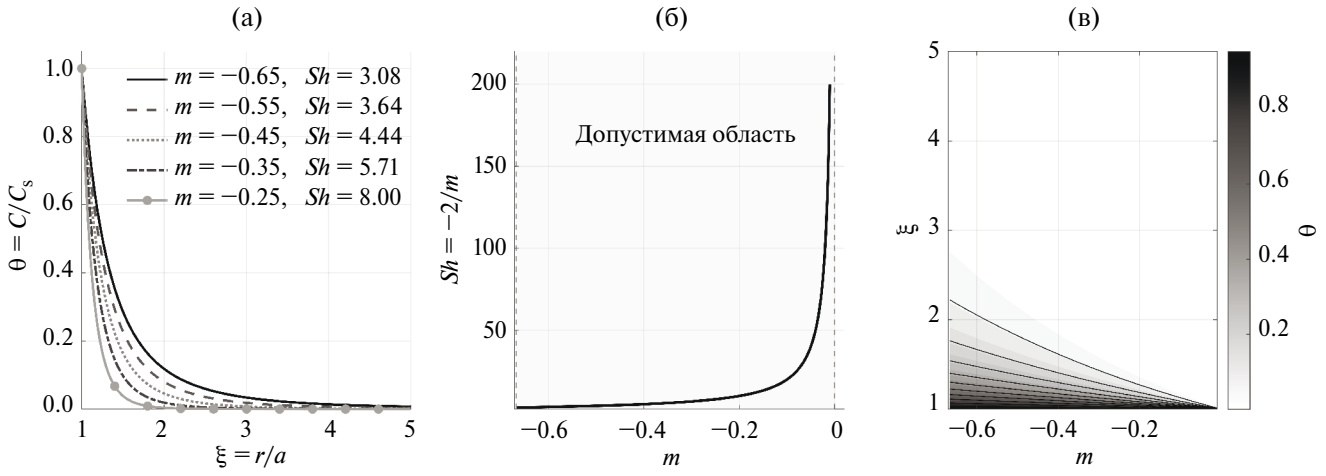


Рис. 2. (а) Профили θ при различных m; (б) зависимость $Sh(m)$; (в) контуры постоянной концентрации на плоскости (ξ, m)
Fig. 2. (а) θ profiles for various m; (б) $Sh(m)$ dependence; (в) constant concentration contours in the (ξ, m) plane

На рис. 3б представлена зависимость Sh и Da в полулогарифмическом масштабе по Da. Кривая монотонно растет, асимптотически уходя на бесконечность при $Da \to \infty$ ($m \to 0^-$). Точки, соответствующие рассчитанным m, показывают: с ростом Da от 0.24 до 40 значение Sh увеличивается лишь от 3 до 8. Слабая чувствительность Sh к Da в области больших стоков может оказаться важной при практических оценках массообмена.

При $m \to -2/3^+$ показатель степени $2/m$ стремится к -3, профиль принимает вид $\theta \sim \xi^{-3}$, число Шервуда достигает значения $Sh = 3$ (при определении через радиус a), а $Da \to 0$. В этом пределе объемная реакция исчезает, однако коэффициент диффузии остается сильно зависящим от концентрации: $D(C) \sim C^{-2/3}$. Полученное значение $Sh = 3$ является характерной чертой данного нелинейного диффузионного режима. Оно принципиально отличается от классического линейного предела для сферы с постоянным коэффициентом диффузии, где профиль имеет вид $\theta \sim \xi^{-1}$, а число Шервуда, определенное через диаметр частицы, равно 2 [2]. В противоположном пределе $m \to 0^-$ формально $Da \to \infty$, $Sh \to \infty$, но найденное семейство решений не переходит в классическое экспоненциально-степенное решение для $D = \text{const}$. Причина в том, что последнее существует при произвольных Da, тогда как полученные профили жестко привязаны к условию (10). Это подчеркивает самостоятельность нового класса решений.

При отрицательном m коэффициент диффузии растет с уменьшением концентрации, что ускоряет распространение вещества от поверхности частицы в объем среды, где оно расходуется в объемной реакции. Одновременно реакция наиболее интенсивна вблизи поверхности, где концентрация максимальна. Баланс нелинейной диффузии и стока формирует алгебраически затухающий профиль, возможный только при строго определенной интенсивности реакции, задаваемой числом Дамкёлера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено точное решение стационарной задачи диффузии, осложненной объемной реакцией первого порядка, для сферической частицы в среде, где коэффициент диффузии степенным образом зависит от концентрации.

Установлено, что степенной профиль концентрации возникает не при любых значениях параметров, а лишь при выполнении строгой связи между числом Дамкёлера и показателем нелинейности. Эта связь выделяет однопараметрическое семейство точных решений.

Определен интервал допустимых значений показателя нелинейности. На его границах решение либо переходит в предельный режим нелинейной диффузии с минимальным числом Шервуда, равным трем, либо теряет структуру, не сводясь к случаю постоянного коэффициента диффузии. Тем самым найденный класс решений дополняет известные результаты для нелинейного массопереноса.

Получено выражение для числа Шервуда, которое в рамках однопараметрического семейства точных решений зависит только от показателя нелинейности. Эта зависимость не является универсальной корреляцией массообмена: она реализуется лишь при выполнении условия совместности. Даже сильное изменение числа Дамкёлера приводит к сравнительно слабому росту числа Шервуда, что может быть существенно при качественных оценках эффективности массообмена.

Результаты работы могут использоваться как эталонные тесты при разработке и верификации численных методов, предназначенных для моделирования реакционно-диффузионных процессов в средах с переменными свойствами. Перспективным направлением дальнейших исследований является анализ устойчивости найденных режимов и обобщение на реакции произвольного порядка.

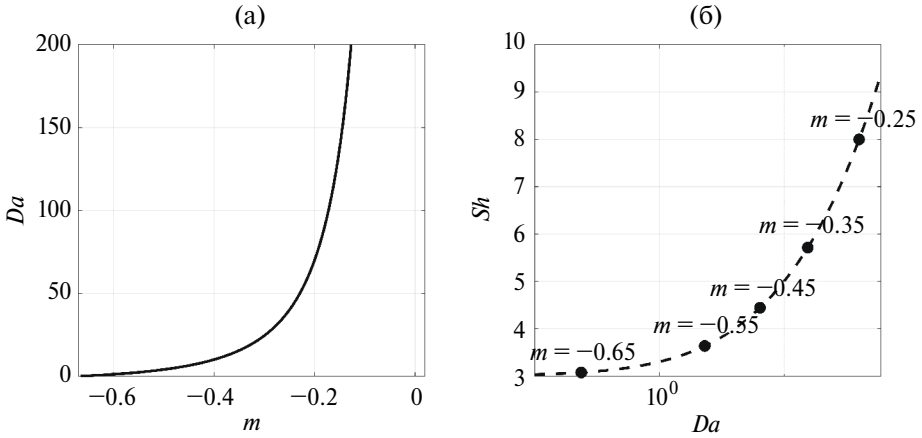


Рис. 3. (а) Число Дамкёлера $Da(m)$ для точного решения; (б) связь $Sh(Da)$
Fig. 3. (а) Damköhler number $Da(m)$ for the exact solution; (б) $Sh(Da)$ relationship

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д. и др. *Химическая гидродинамика*. Москва: Квант, 1996.
2. Crank J. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
3. Fujita H. Diffusion in polymer-diluent systems. *Adv. Polym. Sci*. 1961. Vol. 3. Pp. 1–47. https://doi.org/10.1007/BFb0050514
4. Muhr A.H., Blanshard J.M. Diffusion in gels. *Polymer*. 1982. Vol. 23. no. 7. Pp. 1012–1026. https://doi.org/10.1016/0032-3861(82)90402-5
5. Ruthven D.M. Sorption kinetics for diffusion-controlled systems with a strongly concentration-dependent diffusivity. *Chem. Eng. Sci*. 2004. Vol. 59. no. 21. Pp. 4531–4545. https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.06.028
6. Ko D.C.K., Porter J.F., McKay G. Application of the concentration-dependent surface diffusion model on the multicomponent fixed-bed adsorption systems. *Chem. Eng. Sci*. 2005. Vol. 60. no. 20. Pp. 5472–5479. https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.04.048
7. Bratsun D.A., Oschepkov V.O., Mosheva E.A. et al. The effect of concentration-dependent diffusion on double-diffusive instability. *Phys. Fluids*. 2022. Vol. 34. no. 3. P. 034112. https://doi.org/10.1063/5.0079850
8. Krause A.L., Gaffney E.A., Walker B.J. Concentration-dependent domain evolution in reaction–diffusion systems. *Bull. Math. Biol*. 2023. Vol. 85. no. 2. P. 14. https://doi.org/10.1007/s11538-022-01115-2
9. Hyun Woong Jang, Daoyong Yang. Determination of the concentration-dependent effective diffusivity of CO_2 in unconsolidated porous media saturated with heavy oil by considering the swelling effect. *Int. J. Heat Mass Transf*. 2023. Vol. 201. P. 123552. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123552
10. Zakirov T.R., Khramchenkov M.G. Effect of pore space heterogeneity on the adsorption dynamics in porous media at various convection-diffusion and reaction conditions: A lattice Boltzmann study. *J. Pet. Sci. Eng*. 2022. Vol. 212. P. 110300. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110300
11. Majeed A.H., Mahmood R., Dong Liu. Finite element simulations of double diffusion in a staggered cavity filled with a power-law fluid. *Phys. Fluids*. 2024. Vol. 36. P. 033101. https://doi.org/10.1063/5.0189237
12. Keeton B.W., Nomura K.K., Sánchez A.L. et al. A computational investigation of swirl-number and Damköhler-number effects on non-premixed laminar swirling jet flames. *Combust. Flame*. 2023. Vol. 258. P. 113075. https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.113075
13. Magyari E. Exact analytical solution of a nonlinear reaction–diffusion model in porous catalysts. *Chem. Eng. J*. 2008. Vol. 143. nos. 1–3. Pp. 167–171. https://doi.org/10.1016/j.cej.2008.03.018
14. Abbasbandy S. Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method. *Chem. Eng. J*. 2008. Vol. 136. nos. 2–3. Pp. 144–150. https://doi.org/10.1016/j.cej.2007.03.022
15. Yan-Ping Sun, Shi-Bin Liu, Keith S. Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by the decomposition method. *Chem. Eng. J*. 2004. Vol. 102. no. 1. Pp. 1–10. https://doi.org/10.1016/S1385-8947(03)00060-3
16. Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear reaction-diffusion systems*. Kyiv: Springer International Publishing, 2017.
17. Baranovskii E.S., Brizitskii R.V., Saritskaia Z.Yu. Optimal control problem for 3D mass transfer model with concentration-dependent coefficients: analysis of properties of steady solutions. *Math. Methods Appl. Sci*. 2026. Vol. 49. no. 8. Pp. 8532–8547. https://doi.org/10.1002/mma.70485
18. Montagnaro F. Sherwood (*Sh*) number in chemical engineering applications–A brief review. *Energies*. 2024. Vol. 17. no. 17. P. 4342. https://doi.org/10.3390/en17174342
19. Tao Liu. Parameter estimation with the multigrid-homotopy method for a nonlinear diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math*. 2022. Vol. 413. P. 114393. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114393
20. Carrillo J.A., Esposito A., Jeremy Sheung-Him Wu. Nonlocal approximation of nonlinear diffusion equations. *Calc. Var. Partial Differ. Equ*. 2024. Vol. 63. P. 100. https://doi.org/10.1007/s00526-024-02690-z
21. Wu Chi Chen, Pfeffer R. Local and over-all mass transfer rates around solid spheres with first-order homogeneous chemical reactions. *Ind. Eng. Chem. Fundam*. 1970. Vol. 9. no. 1. Pp. 101–107. https://doi.org/10.1021/i160033a017
22. Sulaiman M., Climent E., Hammouti A. et al. Mass transfer towards a reactive particle in a fluid flow: Numerical simulations and modeling. *Chem. Eng. Sci*. 2019. Vol. 199. Pp. 496–507. https://doi.org/10.1016/j.ces.2018.12.051
23. Nugraha M.G., Andersson R., Andersson B. On the Sherwood number correction due to Stefan flow. *Chem. Eng. Sci*. 2022. Vol. 249. P. 117292. https://doi.org/10.1016/j.ces.2021.117292
24. Cherniha R., King J.R., Kovalenko S. Lie symmetry properties of nonlinear reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusivity. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*. 2016. Vol. 36. Pp. 98–108. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.11.023
25. Changzheng Q. Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method. *IMA J. Appl. Math*. 1999. Vol. 62. no. 3. Pp. 283–302. https://doi.org/10.1093/imamat/62.3.283

REFERENCES

1. Kutepov A.M., Polianin A.D., Zaprianov Z.D. et al. *Khimicheskaia gidrodinamika* [*Chemical Hydrodynamics*]. Moskva: Kvant, 1996. (In Russ.)
2. Crank J. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
3. Fujita H. Diffusion in polymer-diluent systems. *Adv. Polym. Sci*. 1961;**3**:1–47. https://doi.org/10.1007/BFb0050514
4. Muhr A.H., Blanshard J.M. Diffusion in gels. *Polymer*. 1982;**23**(7):1012–1026. https://doi.org/10.1016/0032-3861(82)90402-5
5. Ruthven D.M. Sorption kinetics for diffusion-controlled systems with a strongly concentration-dependent diffusivity. *Chem. Eng. Sci*. 2004;**59**(21):4531–4545. https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.06.028
6. Ko D.C.K., Porter J.F., McKay G. Application of the concentration-dependent surface diffusion model on the multicomponent fixed-bed adsorption systems. *Chem. Eng. Sci*. 2005;**60**(20):5472–5479. https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.04.048
7. Bratsun D.A., Oschepkov V.O., Mosheva E.A. et al. The effect of concentration-dependent diffusion on double-diffusive instability. *Phys. Fluids*. 2022;**34**(3):034112. https://doi.org/10.1063/5.0079850
8. Krause A.L., Gaffney E.A., Walker B.J. Concentration-dependent domain evolution in reaction–diffusion systems. *Bull. Math. Biol*. 2023;**85**(2):14. https://doi.org/10.1007/s11538-022-01115-2
9. Hyun Woong Jang, Daoyong Yang. Determination of the concentration-dependent effective diffusivity of CO_2 in unconsolidated porous media saturated with heavy oil by considering the swelling effect. *Int. J. Heat Mass Transf*. 2023;**201**:123552. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123552
10. Zakirov T.R., Khramchenkov M.G. Effect of pore space heterogeneity on the adsorption dynamics in porous media at various convection-diffusion and reaction conditions: A lattice Boltzmann study. *J. Pet. Sci. Eng*. 2022;**212**:110300. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110300
11. Majeed A.H., Mahmood R., Dong Liu. Finite element simulations of double diffusion in a staggered cavity filled with a power-law fluid. *Phys. Fluids*. 2024;**36**:033101. https://doi.org/10.1063/5.0189237
12. Keeton B.W., Nomura K.K., Sánchez A.L. et al. A computational investigation of swirl-number and Damköhler-number effects on non-premixed laminar swirling jet flames. *Combust. Flame*. 2023;**258**:113075. https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2023.113075
13. Magyari E. Exact analytical solution of a nonlinear reaction–diffusion model in porous catalysts. *Chem. Eng. J*. 2008;**143**(1–3):167–171. https://doi.org/10.1016/j.cej.2008.03.018
14. Abbasbandy S. Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method. *Chem. Eng. J*. 2008;**136**(2–3):144–150. https://doi.org/10.1016/j.cej.2007.03.022
15. Yan-Ping Sun, Shi-Bin Liu, Keith S. Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by the decomposition method. *Chem. Eng. J*. 2004;**102**(1):1–10. https://doi.org/10.1016/S1385-8947(03)00060-3
16. Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear reaction-diffusion systems*. Kyiv: Springer International Publishing, 2017.
17. Baranovskii E.S., Brizitskii R.V., Saritskaia Z.Yu. Optimal control problem for 3D mass transfer model with concentration-dependent coefficients: analysis of properties of steady solutions. *Math. Methods Appl. Sci*. 2026;**49**(8):8532–8547. https://doi.org/10.1002/mma.70485
18. Montagnaro F. Sherwood (*Sh*) number in chemical engineering applications–A brief review. *Energies*. 2024;**17**(17):4342. https://doi.org/10.3390/en17174342
19. Tao Liu. Parameter estimation with the multigrid-homotopy method for a nonlinear diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math*. 2022;**413**:114393. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114393
20. Carrillo J.A., Esposito A., Jeremy Sheung-Him Wu. Nonlocal approximation of nonlinear diffusion equations. *Calc. Var. Partial Differ. Equ*. 2024;**63**:100. https://doi.org/10.1007/s00526-024-02690-z
21. Wu Chi Chen, Pfeffer R. Local and over-all mass transfer rates around solid spheres with first-order homogeneous chemical reactions. *Ind. Eng. Chem. Fundam*. 1970;**9**(1):101–107. https://doi.org/10.1021/i160033a017
22. Sulaiman M., Climent E., Hammouti A. et al. Mass transfer towards a reactive particle in a fluid flow: Numerical simulations and modeling. *Chem. Eng. Sci*. 2019;**199**:496–507. https://doi.org/10.1016/j.ces.2018.12.051
23. Nugraha M.G., Andersson R., Andersson B. On the Sherwood number correction due to Stefan flow. *Chem. Eng. Sci*. 2022;**249**:117292. https://doi.org/10.1016/j.ces.2021.117292
24. Cherniha R., King J.R., Kovalenko S. Lie symmetry properties of nonlinear reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusivity. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*. 2016;**36**:98–108. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.11.023
25. Changzheng Q. Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method. *IMA J. Appl. Math*. 1999;**62**(3):283–302. https://doi.org/10.1093/imamat/62.3.283

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Губарева Кристина Владимировна – канд. техн. наук; доц. каф. промышленной теплоэнергетики, ст. науч. сотр., Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация
E-mail: r.kristina2017@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-9845-8372

Просвиряков Евгений Юрьевич – д-р физ.-мат. наук, доц.; проф. каф. информационных технологий и систем управления, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина; зав. сектором, Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: evgen_pros@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2349-7801

Поступила в редакцию 20.07.2026 г.
После доработки 31.08.2026 г.
Принята к публикации 03.09.2026 г.

ABOUT THE AUTHORS

Gubareva, Kristina V. – Cand. Sc. (Engineering); Associate Professor at the Department of Industrial Heat Power Engineering, Senior Research Officer, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: r.kristina2017@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-9845-8372

Prosviryakov, Evgenii Yu. – Dr. Sci. (Physics and Mathematics); Professor at the Department of Information Technologies and Control Systems, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin; Head of Sector, Institute of Engineering Science named after E.S. Gorkunov, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: evgen_pros@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2349-7801

Received July 20, 2026
Revised August 31, 2026
Accepted September 03, 2026